5/12/04

1) E' dato il sistema dinamico scalare

PER TUTTI

$$x_{i+1} = a x_i + b u_i \ , \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \ , \quad x_0 = \hat{x}$$

Il parametro b è sconosciuto, ma è disponibile un dispositivo che, stadio per stadio, ne fornisce il valor medio $\hat{b}_i$ e la varianza β_i^2 (tali valori dipendono dal tempo perchè sono calcolati sulla base delle misure su x_i e delle decisioni via via generate). Il parametro a, invece, è noto.

Il costo è dato da $J = \sum_{i=0}^{N-1} u_i^2 + v_N x_N^2$.

Applicando la Programmazione Dinamica, si consideri solo l'ultimo stadio e si calcoli la legge decisionale ottima $u_{N-1}^o = \gamma_{N-1}^o(x_{N-1})$ che minimizza il valor medio del costo J.

---

2) Un canale di misura lineare è modellato da

$$\underline{y}_i = H \underline{x}_i + \underline{\eta}_i \ , \quad i = 0, 1, \dots, N$$

H è una matrice incognita di n righe ed m colonne. Determinarne gli elementi supponendo che siano disponibili le misure $\underline{y}_0, \dots, \underline{y}_N$ e $\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_N$ con $N \gg m$.

Si considerano due casi:

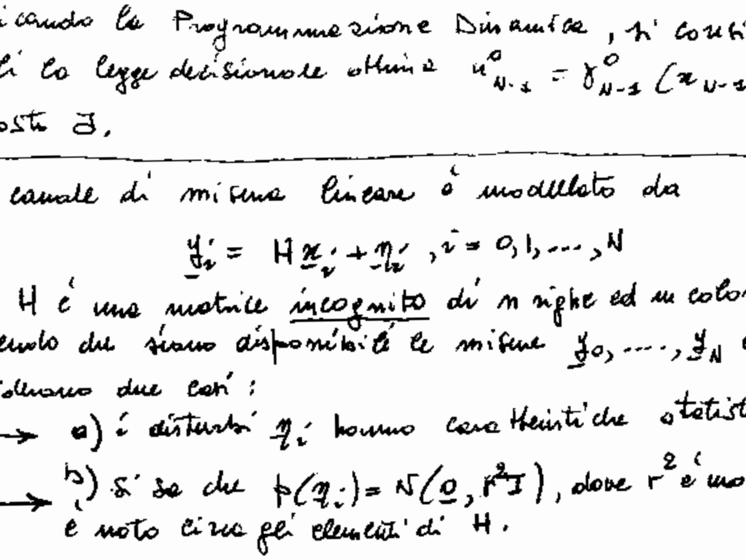
Per RO1 → a) i disturbi $\underline{\eta}_i$ hanno caratteristiche statistiche sconosciute, si sa che $E(\underline{\eta}_i) = \underline{0}$

Per tutti gli altri → b) si sa che $p(\underline{\eta}_i) = N(\underline{0}, r^2 I)$, dove r^2 è uno scalare e I è la matrice identità; nulla è noto circa gli elementi di H.

---

3)

Per TUTTI



Problema 1-2-2.

Con riferimento allo schema riportato in figura, si vuole modellare un problema di gestione di 3 dighe in termini di PL.

A tal fine, si scriva detto problema di PL, tenendo conto dei seguenti fatti:

I vincoli sono costituiti:

- dalle 3 equazioni di stato, una per ciascuna diga negli istanti decisionali $i = 0, 1, \dots, N-1$ (si scriva l'equazione di stato di ciascuna diga facendo il bilancio $x_{i+1} = x_i + \dots - \dots$)

Variabili in gioco sono le variabili di stato x_{ki} ($k = 1, 2, 3$), le variabili decisionali u_{ji} ($j = 1, \dots, 6$) e y_{ki} ($k = 1, 2, 3$, dai fiumi rilasciati dalle dighe per mantenere portate adeguate nei fiumi a valle (tali portate non devono essere inferiori ai valori y_1, y_2, y_3), le variabili r_{ki} ($k = 1, 2, 3$) date delle portate dei fiumi entranti (tali portate sono da considerarsi note).

- Delle capacità dei canali, espresse dalle lettere maiuscole riportate a fianco dei canali stessi.
- Delle capacità X_1, X_2, X_3 delle tre dighe.

Si scriva poi, per completare il problema di PL, il profitto da massimizzare delle 4 utenze riportate nello schema.

PER TUTTI TRANNE CHE PER RO1

4) Si consideri un Problema LQ, con la variante data dal fatto che lo stato x_i è noto soltanto all'istante $i+1$ (e cioè con un passo di ritardo), x_0 è invece noto all'istante 0. Si determinino quindi le leggi decisionali ottime $\underline{u}_0^o = \underline{\gamma}_0^o(\underline{x}_0)$, $\underline{u}_1^o = \underline{\gamma}_1^o(\underline{x}_0, \underline{y}_0), \dots, \underline{u}_{N-1}^o = \underline{\gamma}_N^o(\underline{x}_{N-1}, \underline{y}_{N-1})$.

1) $$J^o_{N-1}(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1}} \left\{ u^2_{N-1} + v_N \left[E\left(a x_{N-1} + b u_{N-1}\right)^2 \mid \text{dati passati (decisioni e misure)} \right] \right\} =$$

$$= \min_{u_{N-1}} \left\{ u^2_{N-1} + v_N \left(a x_{N-1} + \hat{b}_{N-1} u_{N-1} \right)^2 + v_N \beta^2 u^2_{N-1} \right\}$$

$$\Rightarrow \cancel{2} u_{N-1} + \cancel{2} v_N (a x_{N-1} + \hat{b} u_{N-1}) \hat{b} + \cancel{2} v_N \beta^2 u_{N-1} = 0$$

$$u^o_{N-1} = - \frac{a \hat{b}}{1 + \hat{b}^2 v_N + \beta^2 v_N} x_{N-1}$$

---

2) $$\underline{y}_i = \begin{bmatrix} \underline{h}_1' \\ \vdots \\ \underline{h}_k' \\ \vdots \\ \underline{h}_n' \end{bmatrix} \underline{x}_i + \underline{\eta}_i \implies$$ Si considerino le misure $y_i^{(k)} = \underline{h}_k' \underline{x}_i + \eta_i^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$.
Le n misure possono essere considerate indipendentemente. Per semplicità notazionale, tralasciamo l'apice k.

caso a) $$\begin{cases} y_0 = \underline{h}' \underline{x}_0 + \eta_0 \\ \vdots \\ y_N = \underline{h}' \underline{x}_N + \eta_N \end{cases} \xrightarrow[\text{Min. Quadr.}]{\text{Usando i}} \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_{\underline{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}_0' \\ \vdots \\ \underline{x}_N' \end{bmatrix}}_{X} \underline{h} + \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_N \end{bmatrix}}_{\underline{\eta}} \Rightarrow \underline{y} \simeq X \underline{h} \Rightarrow \underline{h} = (X'X)^{-1} X'$$

caso b) $$\underline{y} = X \underline{h} + \underline{\eta} \Rightarrow \underline{h}^* = \underline{\alpha} + K_0 (\underline{y} - X \underline{\alpha}), \quad K_0 = \Sigma_0 X \frac{I}{r^2}, \quad \Sigma_0^{-1} = \cancel{\Sigma^{-1}}^{\,0} + X'X \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow \underline{h}^* = \cancel{\underline{\alpha}} + (X'X)^{-1} \cancel{r^2} X \frac{1}{\cancel{r^2}} (\underline{y} - \cancel{X \underline{\alpha}}) = (X'X)^{-1} X' \underline{y}$$

---

3) $$\begin{cases} x_{1,i+1} = x_{1i} + r_{1i} - y_{1i} - u_{1i} - u_{2i} - u_{3i} \\ x_{2,i+1} = x_{2i} + r_{2i} + u_i' - y_{2i} - u_{4i} - u_{5i} \\ x_{3,i+1} = x_3 + r_{3i} + u_{2i} - y_{3i} - u_{6i} \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \qquad \begin{cases} y_{1i} \geq y_1 \\ y_{2i} \geq y_2 \\ y_{3i} > y_3 \end{cases}$$

$$\underset{k=1,2,3}{0 \leq x_{ki} \leq X_k}, \; 0 \leq u_{1i} \leq U_1, \dots, 0 \leq u_{4i} \leq U_4, \; 0 \leq u_{5i} \leq U_5, \boxed{0 \leq u_{4i} + u_{5i} \leq U'}, \dots 0 \leq u_{6i} \leq U_6$$

vincoli sulle portate condivise

$$\max_{\{u_{ki}\}, \{y_{ki}\}} \sum_{i=0}^{N-1} \left(k_3 u_{3i} + k_4 u_i + k_5 u_{5i} + k_6 u_{6i} \right)$$

---

4) Stadio $N-1$

$$J^o_{N-2}(\underline{x}_{N-2}) = \min_{\underline{u}_{N-1}} E_{\underline{\xi}_{N-1}} \left[\underline{x}_{N-1}' V \underline{x}_{N-1} + \underline{u}_{N-1}' P \underline{u}_{N-1} + \left(A \underline{x}_{N-1} + B \underline{u}_{N-1} + \underline{\xi}_{N-1}\right)' V_N (\cdots) \mid \underline{x}_{N-2} \right]$$

$$= \min_{\underline{u}_{N-1}} \left\{ \hat{\underline{x}}_{N-1}' V \hat{\underline{x}}_{N-1} + \mathrm{tr}\left[V \operatorname{cov}(\underline{x}_{N-1} \mid x_{N-2}) \right] + \underline{u}_{N-1}' P \underline{u}_{N-1} + \left(A \hat{\underline{x}}_{N-1} + B \underline{u}_{N-1}\right)' V_N (\cdots) + \mathrm{tr}\left[V_N \operatorname{cov}(A x_{N-1}) \right] + \mathrm{tr}(Q V_N) \right\}$$

$$= \min_{\underline{u}_{N-1}} \left\{ \hat{\underline{x}}_{N-1}' V \hat{\underline{x}}_{N-1} + \underline{u}_{N-1}' P \underline{u}_{N-1} + (A \hat{\underline{x}}_{N-1} + B \underline{u}_{N-1}) V_N (\cdots) \right\} + \text{tracce}$$

$$\Rightarrow \underline{u}^o_{N-1} = - L_{N-1} \hat{\underline{x}}_{N-1}; \quad \hat{\underline{x}}_{N-1} = E(A \underline{x}_{N-2} + B \underline{u}_{N-2} + \underline{\xi}_{N-2} \mid \underline{x}_{N-2}) = A \underline{x}_{N-2} + B \underline{u}_{N-2}$$

In generale: $\underline{u}^o_i = - L_i \hat{\underline{x}}_i$, $\hat{\underline{x}}_{i+1} = A \underline{x}_i + B \underline{u}_i$, $i = 0, 1, \dots, N-1$; $\hat{\underline{x}}_0 = x_0$,