Si consideri un generico problema di programmazione a numeri interi (PLI) $z^* = \max\{c^T x \mid x \in S\}$,

dove S rappresenta l'insieme delle soluzioni ammissibili

come possiamo dimostrare che una soluzione $\tilde{x} \in S$ di (PLI), di valore $c^T \tilde{x}$, è ottima ?

SE disponiamo di una successione

$\overline{z}_1 \geq \overline{z}_2 \geq \ldots \geq \overline{z}_h \geq z^*$

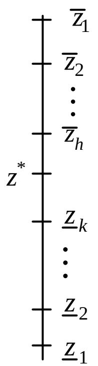
di "limiti superiori" (***upper bounds***)

e di una successione

$\underline{z}_1 \leq \underline{z}_2 \leq \ldots \leq \underline{z}_k \leq z^*$

di "limiti inferiori" (***lower bounds***)

al valore della soluzione ottima



ALLORA la condizione

$\underline{z}_k = c^T \tilde{x} = \overline{z}_h$

è sufficiente per dire che

$c^T \tilde{x} = z^*$

e $\tilde{x}$ è una soluzione ottima

Come possiamo generare una coppia di valori $\overline{z}_h$ e $\underline{z}_k$ tali che $\overline{z}_h = \underline{z}_k$

(o almeno tali che $\overline{z}_h - \underline{z}_k \leq e$, per un valore $e \geq 0$ sufficientemente piccolo?)

Per un problema di **massimo** (**minimo**) ogni soluzione *ammissibile* $\hat{x} \in S$ fornisce un *lower bound* $\underline{z} = c^T \hat{x} \leq z^*$ (*upper bound* $\overline{z} = c^T \hat{x} \geq z^*$)

N.B. Per alcuni problemi costruire soluzioni ammissibili è facile e la difficoltà risiede nel generare soluzioni ammissibili **buone**, il cui valore sia prossimo a z^* .

Per altri problemi invece anche la sola costruzione di soluzioni ammissibili (indipendentemente dalla loro qualità) può essere difficile.

Vediamo ora come calcolare *upper bounds* per problemi di *massimo* (e *lower bounds* per problemi di *minimo*)

Senza perdita di generalità tratteremo il caso dei problemi di massimo

Per calcolare questi valori, detti ***bounds duali*** (*dual bounds*) la tecnica adottata è quella del ***rilassamento.***

<u>Idea</u>: sostituire il problema (PLI) *difficile* da risolvere con uno più semplice (RP), detto *problema rilassato*, il cui valore ottimo sia grande almeno quanto z^*

Definizione 1

Un problema (RP) $z^R = \max\{ f(x) \mid x \in T \}$ è un rilassamento del problema (PLI) $z^* = \max\{ c^T x \mid x \in S \}$ se:

(a) $S \subseteq T$

(b) $c^T x \leq f(x) \quad \forall x \in S$

La condizione (a) dice che la regione ammissibile del problema rilassato deve contenere almeno le soluzioni del problema (PLI), mentre la condizione (b) richiede che la funzione obiettivo del problema rilassato sia almeno grande quanto quella del problema (PLI) per tutte le soluzioni ammissibili di (PLI)

Proposizione 1

Sia (RP) un rilassamento di (PLI) allora

(a) $z^R \geq z^*$

(b) se (RP) è inammissibile anche (PLI) lo è

(c) se la soluzione ottima x^R di (RP) è ammissibile per il problema (PLI) e $c^T x^R = f(x^R)$ allora x^R è soluzione ottima anche di (PLI)

Osservazione: costituiscono rilassamenti dei problemi (PLI) i problemi che si ottengono eliminando (rilassando) parte dei vincoli dei modelli che li descrivono: la nuova regione ammissibile contiene quella del problema originale e la funzione obiettivo rimane invariata

Esempio: il problema dello zaino

$$(PLI) \quad \max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \qquad\qquad (RP) \quad \max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le b \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le b$$

$$x_j \in \{0,1\},\ j=1,\ldots,n \qquad\qquad 0 \le x_j \le 1,\ j=1,\ldots,n$$

e si *rilassi* la condizione $x_j \in \{0,1\},\ j=1,\ldots,n$, che richiede di *non spezzare* gli oggetti, sostituendola con la condizione $0 \le x_j \le 1,\ j=1,\ldots,n$

Otteniamo il problema (RP)

Il problema (RP) può essere risolto in modo efficiente mediante il seguente algoritmo

Rilassamento zaino (Bound di Dantzig)

1. ordina gli oggetti in modo che $\frac{p_1}{w_1} \ge \frac{p_2}{w_2} \ge \ldots \ge \frac{p_n}{w_n}$;
2. $\bar{b} = b$; j=1; $\bar{z} := 0$;
3. while $w_j \le \bar{b}$ do
4. $\quad \bar{b} := \bar{b} - w_j$; $\bar{z} := \bar{z} + p_j$; $j := j+1$;
5. if $\bar{b} > 0$ then $\bar{z} := \bar{z} + p_j \frac{\bar{b}}{w_j}$;

Esempio numerico

$$z^* = \max 10x_1 + 16x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 4x_5$$
$$5x_1 + 8x_2 + 15x_3 + 4x_4 + x_5 \le 12$$
$$x_j \in \{0,1\},\ j = 1,\ldots,5$$

Calcoliamo i rapporti $\frac{p_j}{w_j}$, $j = 1,\ldots,5$: $\left(\frac{10}{5},\frac{16}{8},\frac{5}{15},\frac{12}{4},\frac{4}{1}\right) = \left(3,2,\frac{1}{3},3,4\right)$
e inseriamo gli oggetti nell'ordine 5,4,1,2,3

Gli oggetti 5,4, e 1 occupano 1+4+5=10 unità di spazio e dopo tre iterazioni del ciclo **while** abbiamo $\bar{b} = 2 < 8 = w_2$.

Riempiamo lo spazio residuo $\bar{b}$ con la frazione $\frac{\bar{b}}{w_2} = \frac{2}{8}$ del primo oggetto

che in ordine di **profitto unitario** non sta completamente nel contenitore.

$\bar{z} = 4 + 10 + 12 + 16\frac{2}{8} = 30$ è un *upper bound* per questo problema

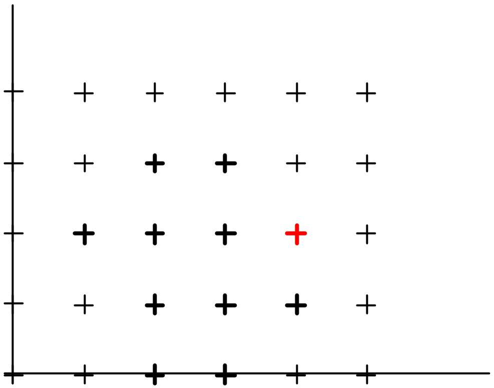
Quello precedente è un esempio di una tecnica molto generale per ottenere problemi rilassati: il ***rilassamento lineare.***

Definizione 2
Dato un programma lineare a numeri interi (PLI)
$z^* = \max\{c^T x \mid x \in P \cap Z^n\}$ con $P = \{x \in \Re^n \mid Ax \le b\}$
indichiamo con rilassamento lineare, o continuo, il problema (RPL) $z^{LP} = \max\{c^T x \mid x \in P\}$

Nel rilassamento lineare trascuriamo le condizioni di interezza di tutte le variabili di un modello di programmazione lineare a numeri interi

N.B. nel caso del problema dello zaino la soluzione ricavata dall'applicazione dell'algoritmo **Rilassamento zaino** è la stessa che si ricaverebbe risolvendo con l'algoritmo del simplesso il modello (RP)

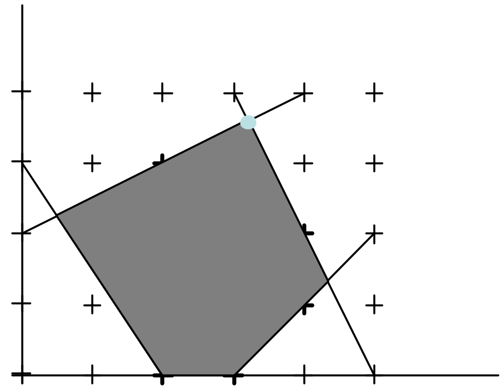
Esempio RPL



$$
\begin{aligned}
z^* &= \max 5x_1 + 4x_2 \\
& 2x_1 + x_2 \le 10 \\
& x_1 - x_2 \le 3 \\
& -x_1 + 2x_2 \le 4 \\
& 3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\
& x_1, x_2 \in Z^+
\end{aligned}
$$

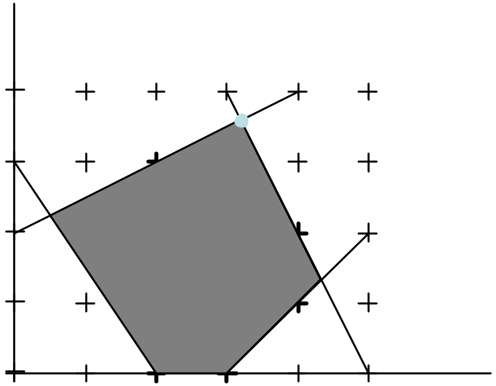
Punto di ottimo
$x^* = (4,2)$ con
$z^* = 28$

Il rilassamento continuo è dato dal problema



$$
\begin{aligned}
z^{PL} &= \max 5x_1 + 4x_2 \\
& 2x_1 + x_2 \le 10 \\
& x_1 - x_2 \le 3 \\
& -x_1 + 2x_2 \le 4 \\
& 3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Punto di ottimo
$x^{PL} = (3.2,3.6)$ con
$z^{PL} = 30.4$

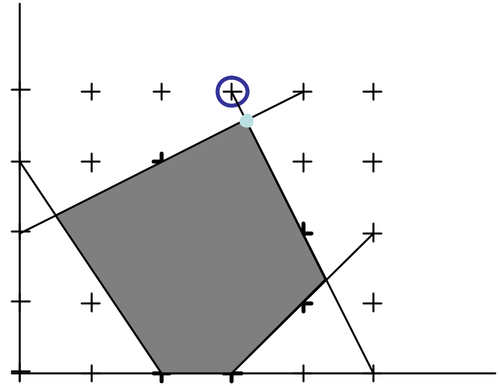


$$z^{PL} = \max 5x_1 + 4x_2$$
$$2x_1 + x_2 \le 10$$
$$x_1 - x_2 \le 3$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Punto di ottimo
$x^{PL} = (3.2, 3.6)$ con
$z^{PL} = 30.4$

Osservazione
Poiché in questo particolare problema il vettore dei coefficienti costo ha tutte componenti intere il valore della soluzione ottima $z^* \in Z$ e quindi il valore di z^{PL} può essere arrotondato per difetto fornendo un upper bound pari a 30:

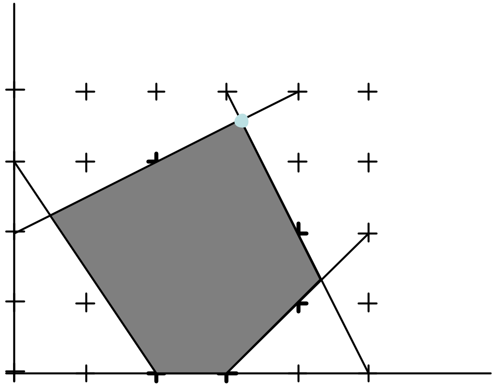
$$\overline{z} = \lfloor z^{PL} \rfloor = \lfloor 30.4 \rfloor = 30$$



$$z^{PL} = \max 5x_1 + 4x_2$$
$$2x_1 + x_2 \le 10$$
$$x_1 - x_2 \le 3$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Punto di ottimo
$x^{PL} = (3.2, 3.6)$ con
$z^{PL} = 30.4$

Osservazione
Si noti che la soluzione che si ottiene arrotondando all'intero più prossimo la soluzione $x^{PL} =$ **(3.2,3.6)**, cioè la soluzione **(3,4)**, non è ammissibile per il problema originale, mentre quella che si ottiene per troncamento, cioè **(3,3)**, non è ottima.



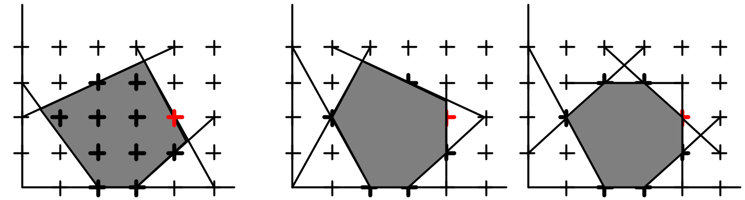
$$
\begin{aligned}
z^{PL} &= \max 5x_1 + 4x_2 \\
2x_1 + x_2 &\le 10 \\
x_1 - x_2 &\le 3 \\
-x_1 + 2x_2 &\le 4 \\
3x_1 + 2x_2 &\ge 6 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Punto di ottimo
$x^{PL} = (3.2, 3.6)$ con
$z^{PL} = 30.4$

Osservazione
In generale gli arrotondamenti sono ***inefficaci*** quando le variabili assumono valori piccoli (es. variabili binarie) mentre risultano ***utili*** in corrispondenza di variabili che rappresentano grandi quantità (es. mix produttivo o pianificazione della produzione)

Si osservi che allo stesso insieme di soluzioni ammissibili del problema (PLI) possono corrispondere molti (infiniti) differenti modelli di programmazione lineare intera, cioè molte differenti ***formulazioni***

Esempio numerico RPL (continua)



$$
\begin{aligned}
z^{PL} &= \max 5x_1 + 4x_2 \\
2x_1 + x_2 &\le 10 \\
x_1 - x_2 &\le 3 \\
-x_1 + 2x_2 &\le 4 \\
3x_1 + 2x_2 &\ge 6 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z^{PL} &= \max 5x_1 + 4x_2 \\
x_1 + 2x_2 &\le 9 \\
x_1 - x_2 &\le 3 \\
-2x_1 + x_2 &\le 0 \\
4x_1 + 2x_2 &\ge 8 \\
x_1 &\le 4 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z^{PL} &= \max 5x_1 + 4x_2 \\
x_1 + x_2 &\le 6 \\
x_1 - x_2 &\le 3 \\
-x_1 + x_2 &\le 1 \\
4x_1 + 2x_2 &\ge 8 \\
x_1 &\le 4 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Definizione 3
Si dice formulazione ***ideale*** di un problema di programmazione lineare a numeri interi (PLI) quella formulazione per la quale il rilassamento continuo (RPL) ha tutti i vertici della regione ammissibile con coordinate intere

Esempio numerico RPL (continua)
Il terzo modello dell'esempio precedente costituisce una formulazione ideale del problema

Le formulazioni ideali sono importanti a causa della **Proposizione 1:**

(c) se la soluzione ottima x^R del problema RP è ammissibile per il problema PLI e $c^T x^R = f(x^R)$ allora x^R è soluzione ottima anche di PLI

Le formulazioni ideali ci garantiscono che la soluzione ottima x^{PL} del rilassamento continuo (RPL) di un problema (PLI) sia anche la soluzione ottima di quel problema