Programmazione Matematica Lineare

Problema di Programmazione Matematica (PM) (problema di ottimizzazione)

$$\max f(\underline{x})$$
$$\text{s.t.}$$
$$\underline{x} \in X \subseteq R^n$$

vettore delle variabili decisionali

insieme delle soluzioni ammissibili

funzione obiettivo scalare

Un problema di PM è lineare quando:

la funzione obiettivo è lineare $\quad f(\underline{x}) = \underline{c}^T \underline{x}$

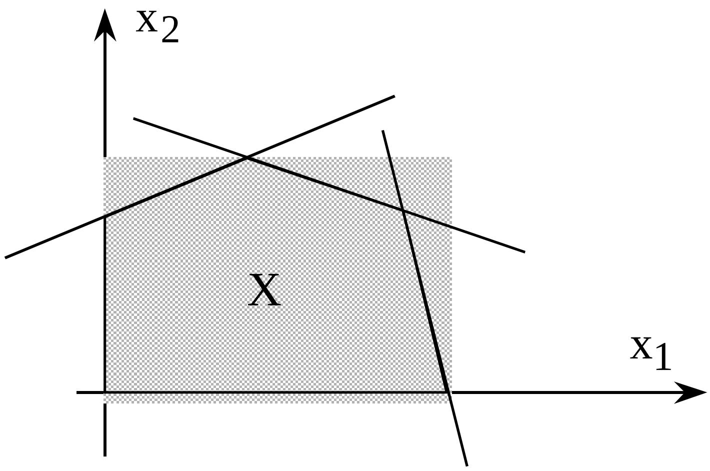
l'insieme X è espresso in termini di relazioni (uguaglianze e disuguaglianze) lineari

$X \to \left\{ \underline{x} \in \mathbf{R}^n : A\underline{x} \le \underline{b} \right\}$ variabili $\underline{x}$ continue **Programmazione Lineare Continua (PL)**

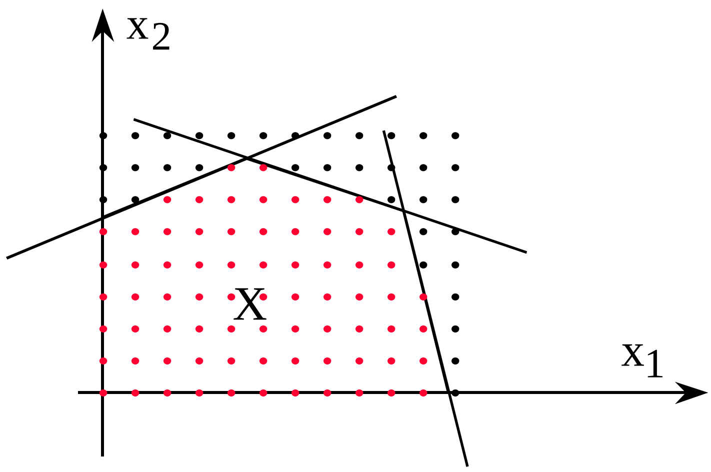
$X \to \left\{ \underline{x} \in \mathbf{Z}^n : A\underline{x} \le \underline{b} \right\}$ variabili $\underline{x}$ intere **Programmazione Lineare Intera (PLI)**

Esempio grafico in 2 dimensioni

$X = \left\{ \underline{x} \in \mathbf{R}^n : A\,\underline{x} \le \underline{b} \right\}$ poliedro composto da ∞ punti



$X = \left\{ \underline{x} \in \mathbf{Z}^n : A\,\underline{x} \le \underline{b} \right\}$ poliedro composto da un numero finito di punti



Esempio: pianificare la produzione di una piccola azienda che produce vernici

L'azienda produce due tipi di vernici, una vernice per interni (I) ed una per esterni (E), usando due materie prime indicate con A e B.

La disponibilità al giorno di materia prima A è pari a 6 ton, mentre quella di materia prima B è di 8 ton.

La quantità di A e B consumata per produrre una ton di vernice E ed I è riportata nella seguente tabella.

		vernici	
		E	I
materie prime	A	1	2
	B	2	1

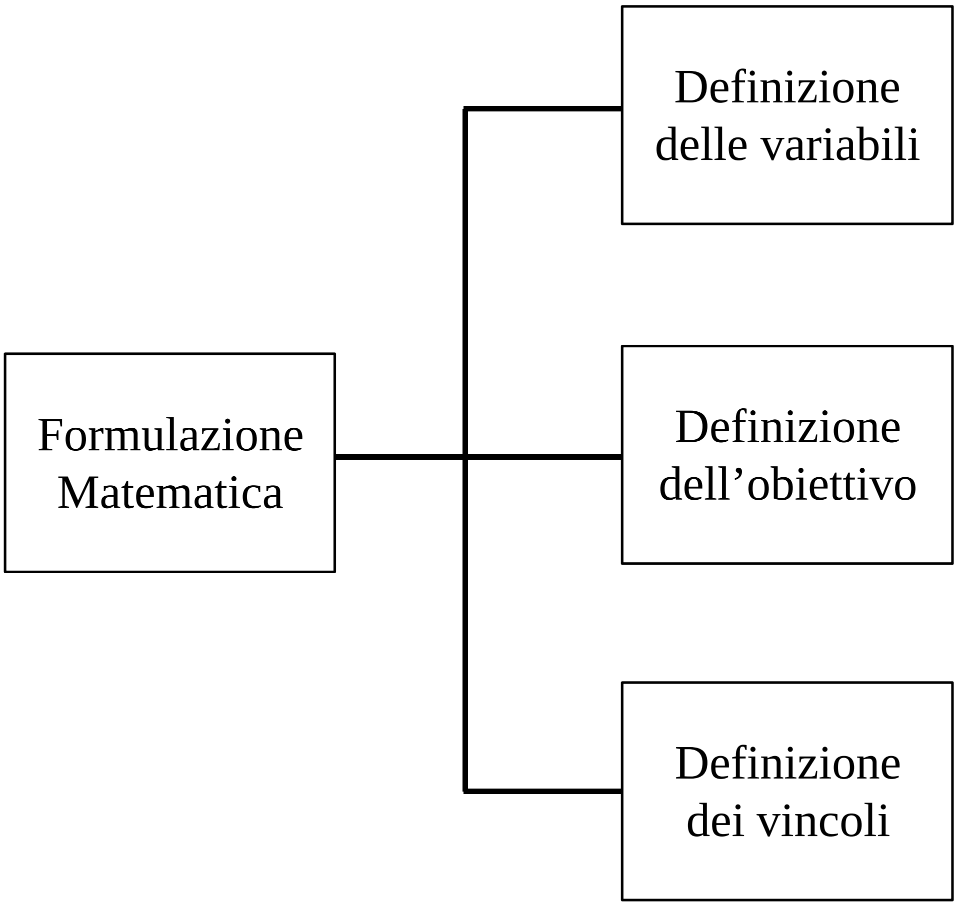
Si ipotizza che tutta la vernice prodotta venga venduta.
Il prezzo di vendita per tonnellata è 3K$ per E e 2K$ per I.

L'azienda ha effettuato un'indagine di mercato con i seguenti esisti:

- la domanda giornaliera di vernice I non supera mai di più di 1 ton quella di vernice E
- la domanda massima giornaliera di vernice I è di 2 ton

Problema: determinare le quantità delle due vernici che debbono essere prodotte giornalmente in modo da rendere massimo il guadagno.

Esempio: formulare il modello matematico



Definizione delle variabili

Si introducono due variabili che rappresentano le quantità prodotte (e vendute) al giorno per le due vernici (ton):

x_E produzione di vernice per esterni
x_I produzione di vernice per interni

Le due variabili sono continue.

Definizione dell’obiettivo

Il guadagno giornaliero (K$) è dato da

$$Z = 3x_E + 2x_I$$

L’obiettivo è rappresentato da un’equazione lineare.

Definizione dei vincoli

- Vincoli (tecnologici) sull’uso delle materie prime (l’uso giornaliero delle materie prime non può eccedere la disponibilità):

$$\text{(A)} \quad x_E + 2x_I \leq 6$$
$$\text{(B)} \quad 2x_E + x_I \leq 8$$

- Vincoli conseguenti le indagini di mercato

$$x_I - x_E \leq 1$$
$$x_I \leq 2$$

- Non negatività delle variabili

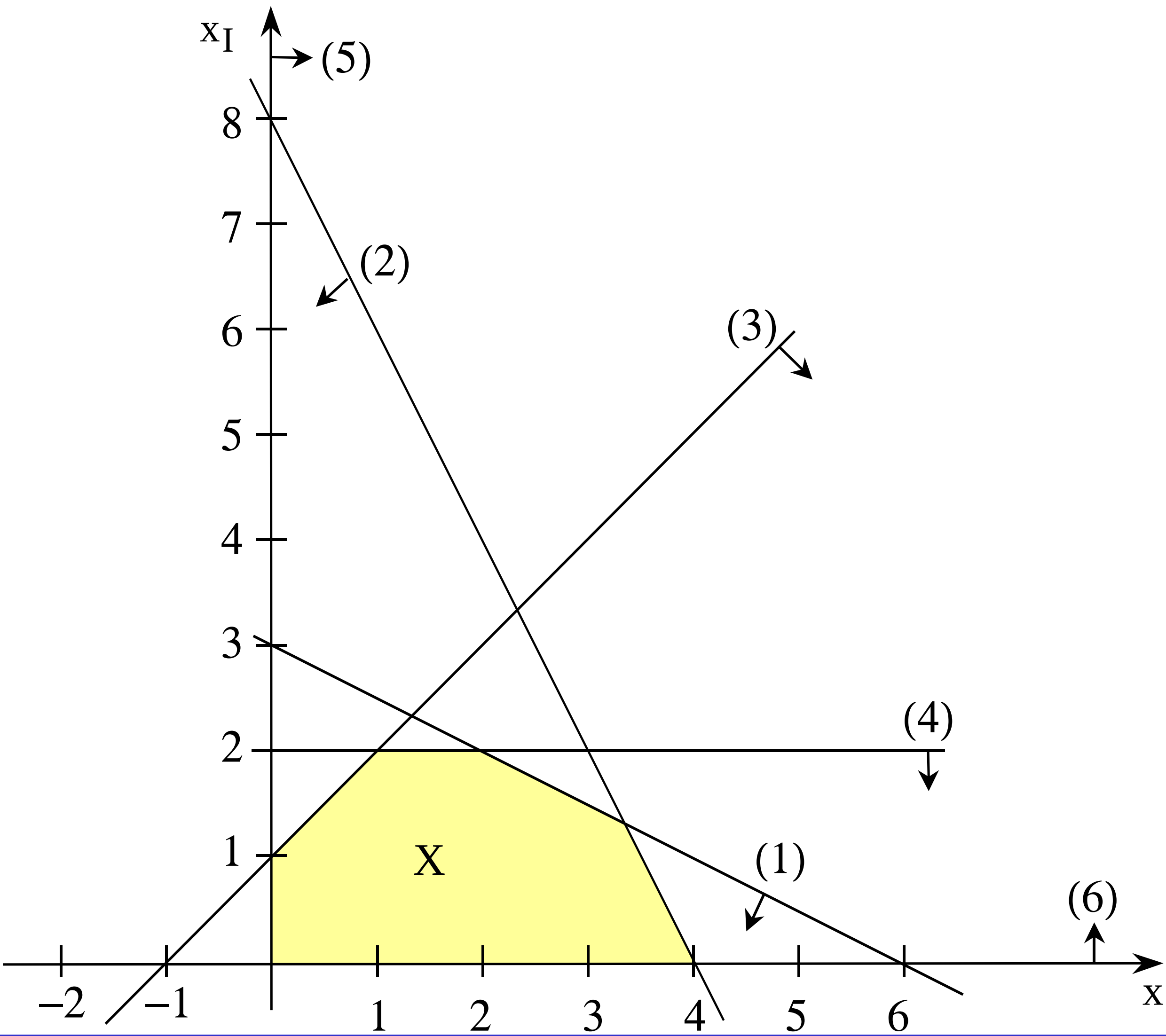
$$x_E \geq 0$$
$$x_I \geq 0$$

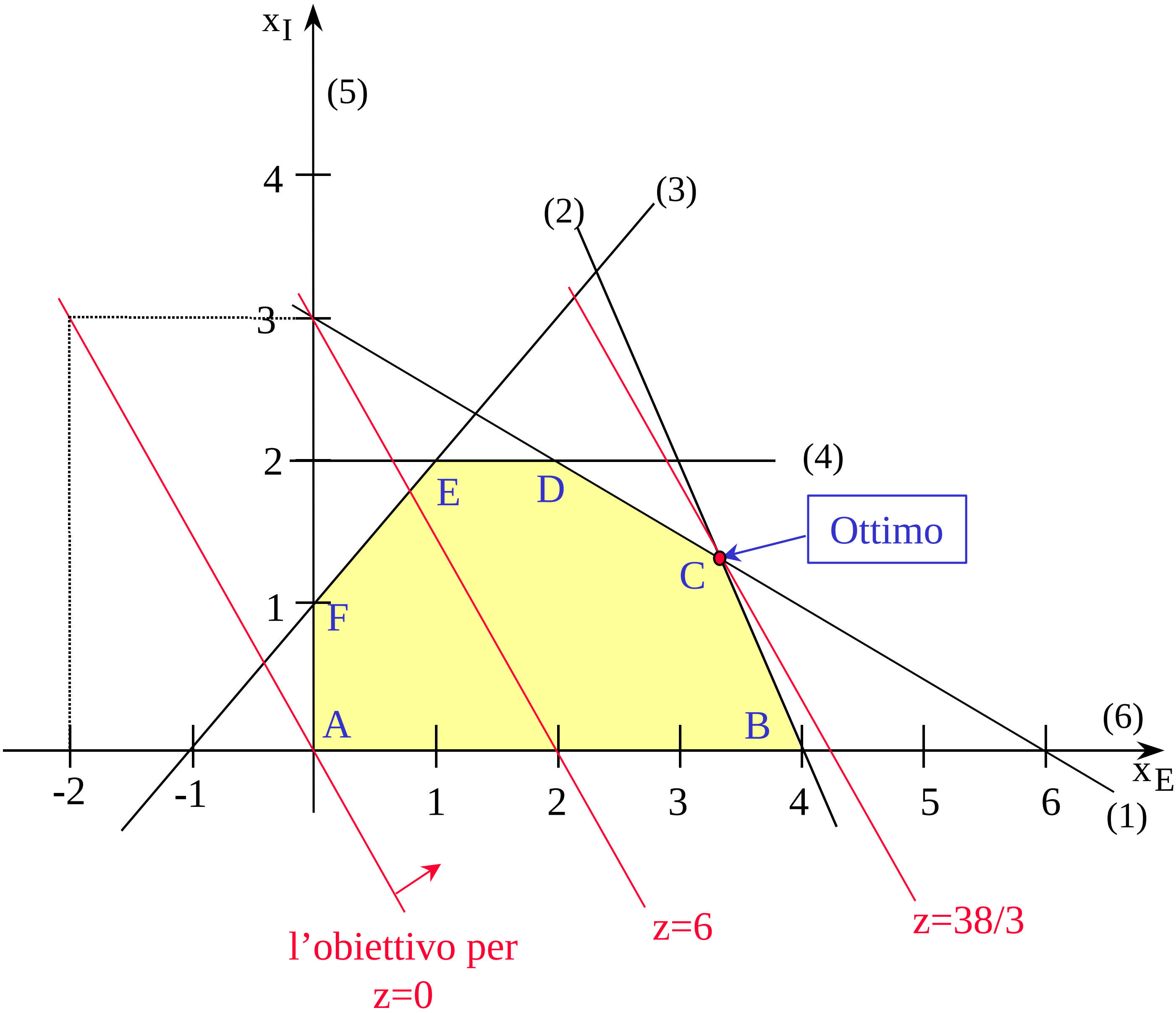
La formulazione definisce un **Problema di Programmazione Lineare a variabili continue**

$$\max\ Z = 3x_E + 2x_I \quad \longleftarrow \quad \textbf{Funzione obiettivo}$$

$$\left.\begin{array}{lr} x_E + 2x_I \le 6 & (1) \\ 2x_E + x_I \le 8 & (2) \\ -x_E + x_I \le 1 & (3) \\ x_I \le 2 & (4) \\ x_E \ge 0 & (5) \\ x_I \ge 0 & (6) \end{array}\right\}$$

vincoli che definiscono quali valori sono ammessi per le due variabili (**Insieme delle soluzioni ammissibili**)



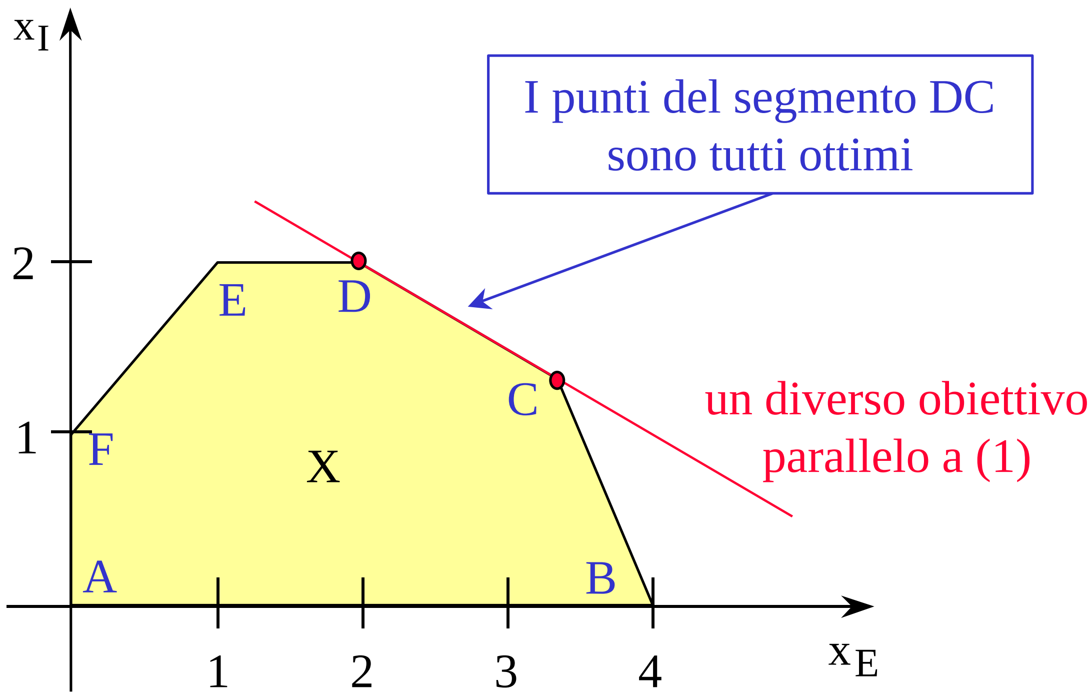


A=(0,0) B=(4,0) C=(10/3,4/3) D=(2,2) E=(1,2) F=(0,1)

Proprietà:

- le soluzioni si trovano sulla frontiera del poliedro X, quindi corrispondono ai **vertici** di X;
- deve essere considerato solo un numero finito di soluzioni.

Se la funzione obiettivo fosse parallela ad un vincolo ...



... esisterebbero infiniti punti di ottimo tutti equivalenti (nell’esempio, quelli del segmento DC).

In questo caso si potrebbe scegliere alternativamente tra i punti estremi C e D.

La ricerca dell’ottimo resta pertanto una esplorazione tra un numero finito di soluzioni alternative corrispondenti ad i vertici del poliedro X.

Esempio: sensitività della soluzione.

Una volta determinata una soluzione ottima può essere interessante verificare quanto questa sia sensibile a variazioni nel modello.

Ad esempio, può essere utile verificare cosa accadrebbe se si modificasse la disponibilità delle materie prime o se variasse il prezzo di vendita delle vernici.

<u>Variazioni rispetto la disponibilità delle risorse</u>.

(a) come aumentare le risorse per migliorare la soluzione ottima;
(b) come ridurre le risorse disponibili lasciando invariata la soluzione ottima.

I vincoli del problema hanno tutti la seguente forma

$$\boxed{\text{quantità di risorsa usata} \quad \leq \quad \text{disponibilità di risorsa}}$$

anche se solamente i vincoli (1) e (2) rappresentano effettivamente il consumo delle materie prime A e B.

Poiché i vincoli (1) e (2) sono soddisfatti all'uguaglianza dalla soluzione ottima corrispondente al punto C=(10/3,4/3), il livello ottimo di produzione per le due vernici è tale da utilizzare tutte le materie prime disponibili.

I vincoli (1) e (2) sono **saturi**, quindi le materie prime A e B sono utilizzate completamente, ovvero sono **risorse scarse**.

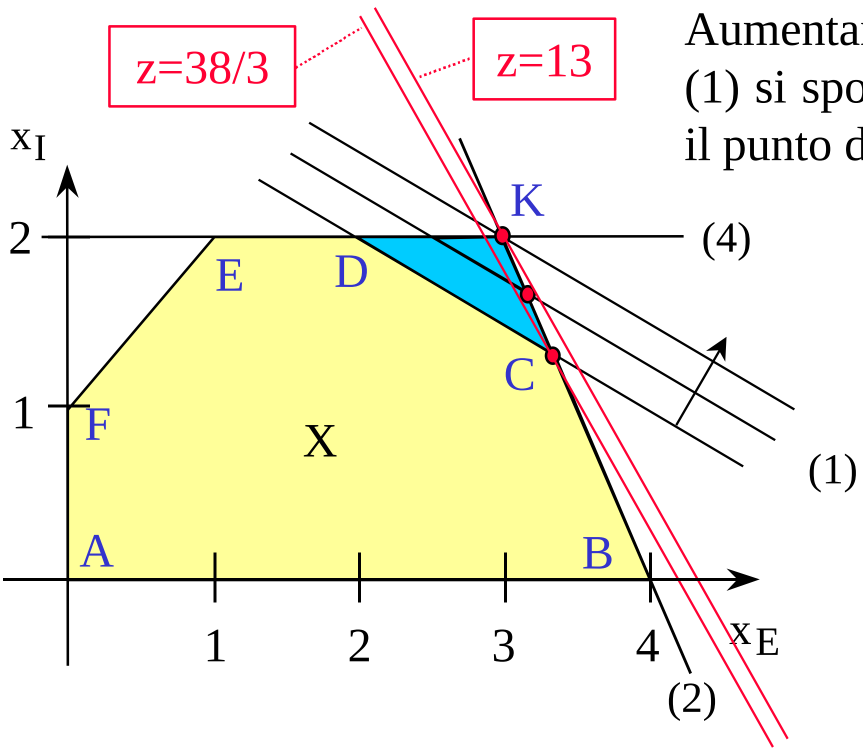
Vincolo saturo → Risorsa scarsa

Vincolo non saturo → Risorsa abbondante

- E’ possibile aumentare la disponibilità di una risorsa scarsa per migliorare la soluzione ottima (caso (a))

- E’ possibile diminuire la disponibilità di una risorsa abbondante senza variare la soluzione ottima (caso (b)).

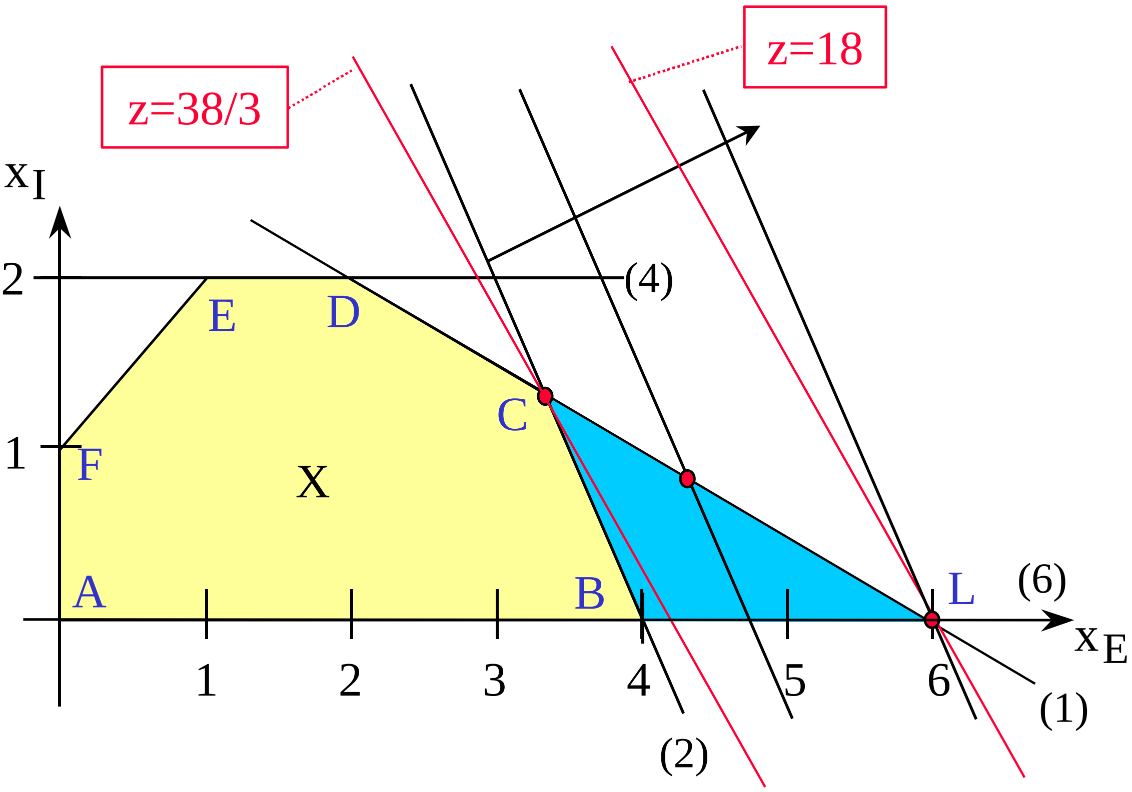
Verifichiamo sino a che livello ha senso aumentare la materia prima A.



Aumentando la risorsa A il vincolo (1) si sposta e di conseguenza varia il punto di ottimo.

Oltre K=(3,2) (intersezione di (2) e (4)) non ha più senso aumentare la risorsa A. Il nuovo valore di A è 7.

Analoga verifica può essere fatta per la materia prima B.

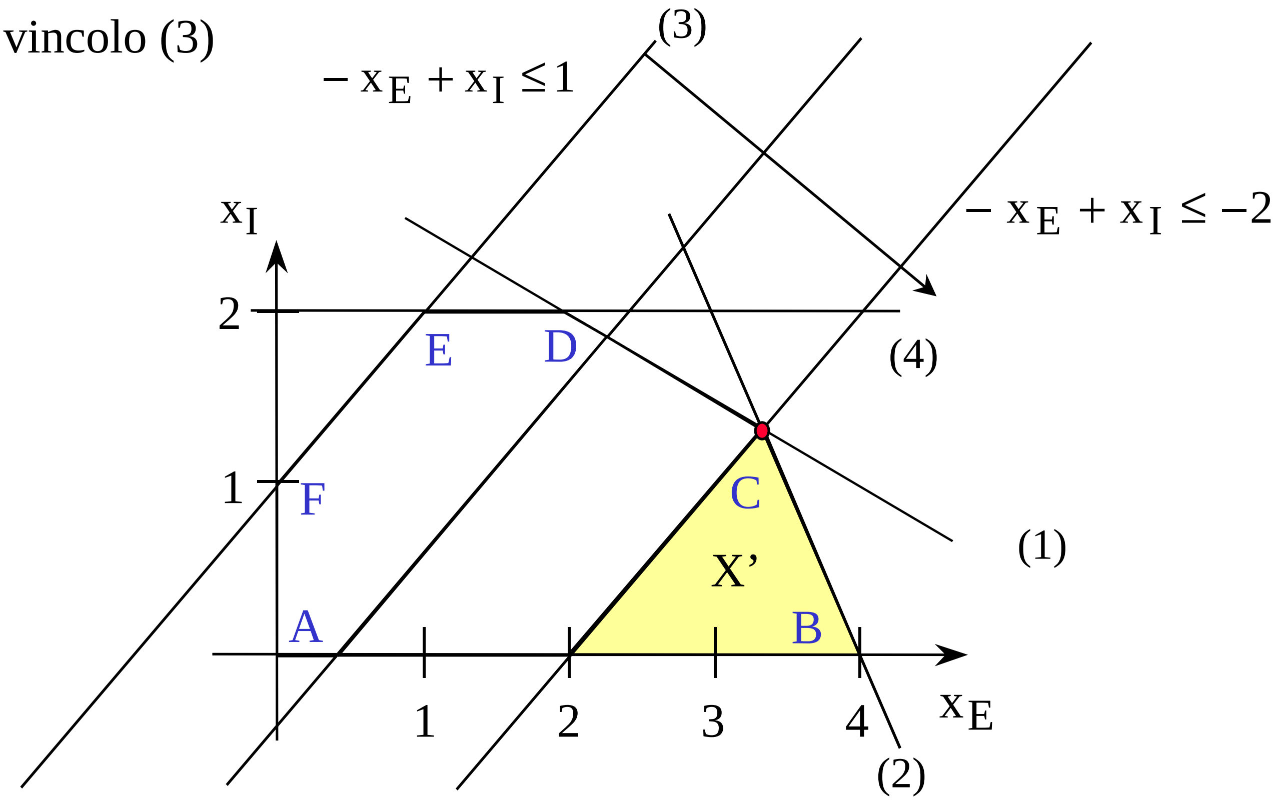


Aumentando la risorsa B il vincolo (2) si sposta e di conseguenza varia il punto di ottimo.

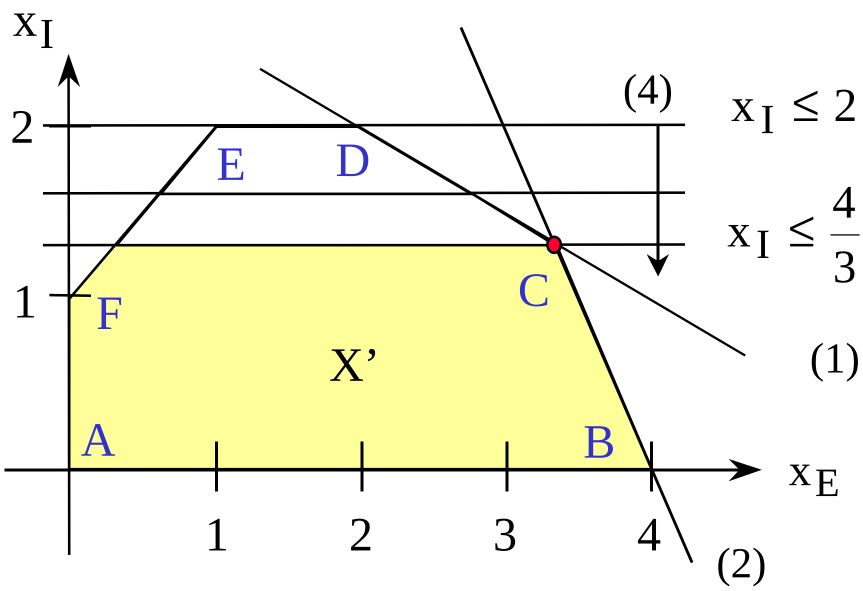
Oltre L=(6,0) (intersezione di (1) e (6)) non ha più senso aumentare la risorsa B. Il nuovo valore di B è 12.

Supponendo i vincoli (3) e (4) relativi al consumo di due ulteriori risorse abbondanti, è possibile verificare di quanto diminuirne la disponibilità senza modificare la soluzione ottima.

Per il vincolo (3)



Per il vincolo (4)



Dopo aver verificato la convenienza di una possibile maggiore disponibilità delle risorse A e B, è interessante determinare quale sia la risorsa che di più convenga aumentare.

Nell'esempio, l'azienda potrebbe avere una limitata disponibilità finanziaria che vorrebbe far fruttare al meglio, acquisendo un'ulteriore quantità di una delle risorse in modo da incrementare maggiormente i propri profitti.

Questa informazione è ottenibile per mezzo della Programmazione Lineare.

Si può calcolare il **Valore di una Unità di Risorsa** y_i:

$$y_i = \frac{\text{massima variazione di z}}{\text{massima variazione della risorsa i}}$$

Per la risorsa A: $$y_A = \frac{13 - \frac{38}{3}}{7-6} = \frac{39-38}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{(K\$/ton)}$$

Per la risorsa B: $$y_B = \frac{18 - \frac{38}{3}}{12-8} = \frac{\frac{54-38}{3}}{4} = \frac{4}{3} \quad \text{(K\$/ton)}$$

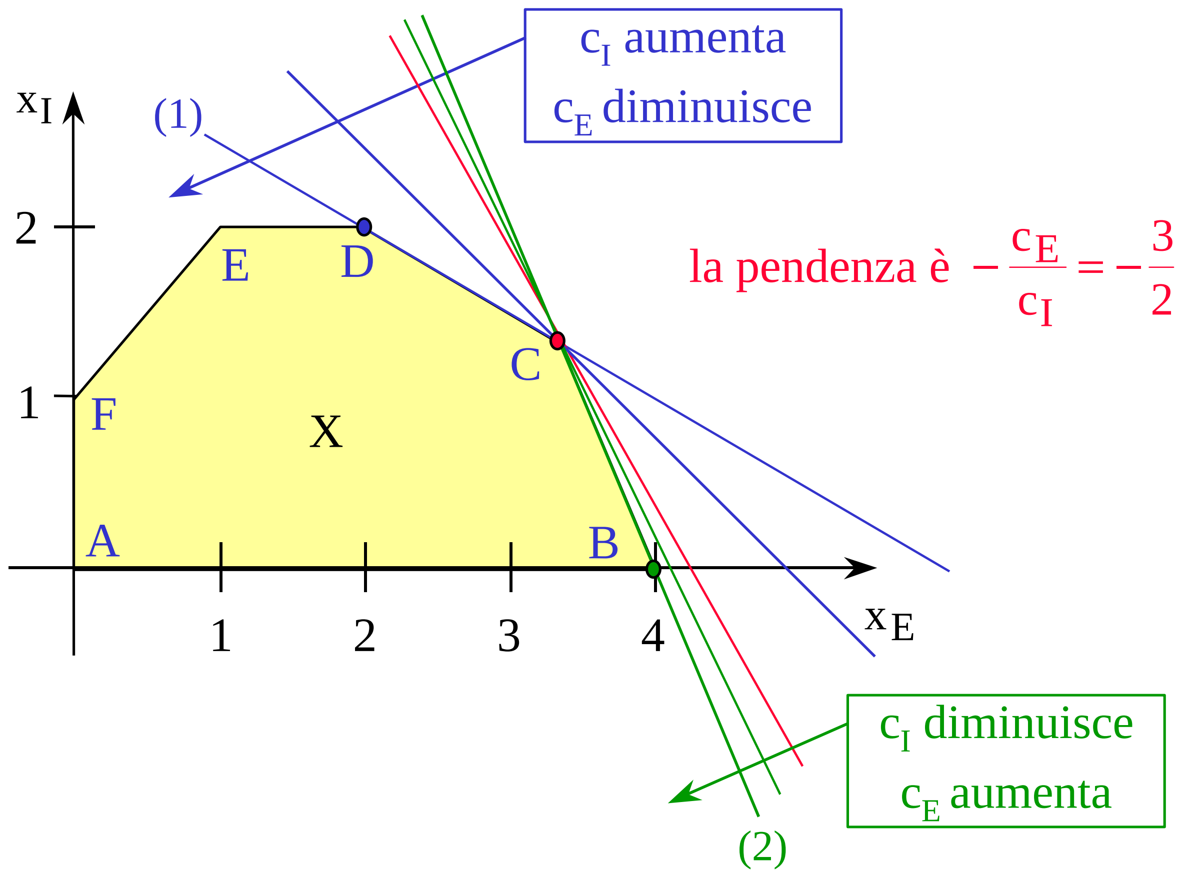
La quantità y_i indica di quanto aumenta l'obiettivo in corrispondenza dell'acquisizione di un'ulteriore unità di risorsa.

E' evidente come nell'esempio convenga acquisire per prima la risorsa B.

Variazioni del prezzo di vendita delle vernici.

Si tratta di analizzare entro quali limiti di tolleranza possono variare i prezzi di vendita senza alterare la soluzione ottima (la produzione di vernici associata al punto C).

Variando c_E e c_I cambia la pendenza della funzione obiettivo:



Variando c_E e c_I il punto C rimane soluzione ottima fino a che la pendenza della funzione obiettivo diventa uguale a quella dei vincoli (1) e (2).

(a) Variamo c_E lasciando c_I=2

Calcoliamo i casi limite:

$$\left.\begin{array}{lll} -\dfrac{c_E}{2} = -\dfrac{1}{2} & = \text{pendenza di (1)} & \Rightarrow c_E = 1 \\ & & \\ -\dfrac{c_E}{2} = -2 & = \text{pendenza di (2)} & \Rightarrow c_E = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \le c_E \le 4$$

Se c_E = 1 C e D sono i punti ottimi. Non appena c_E scende sotto 1 solo D rimane punto di ottimo.
Se c_E = 4 C e B sono i punti ottimi. Non appena c_E supera 4 solo B rimane punto di ottimo.

(b) Variamo c_I lasciando c_E=3

Calcoliamo i casi limite:

$$\left.\begin{array}{lll} -\dfrac{3}{c_I} = -\dfrac{1}{2} & = \text{pendenza di (1)} & \Rightarrow c_I = 6 \\ & & \\ -\dfrac{3}{c_I} = -2 & = \text{pendenza di (2)} & \Rightarrow c_I = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{3}{2} \le c_I \le 6$$

Se c_I = 3/2 C e B sono i punti ottimi. Non appena c_I scende sotto 3/2 solo B rimane punto di ottimo.
Se c_I = 6 C e D sono i punti ottimi. Non appena c_I supera 6 solo D rimane punto di ottimo.