Formulazione di Problemi Decisionali come Problemi di Programmazione Lineare

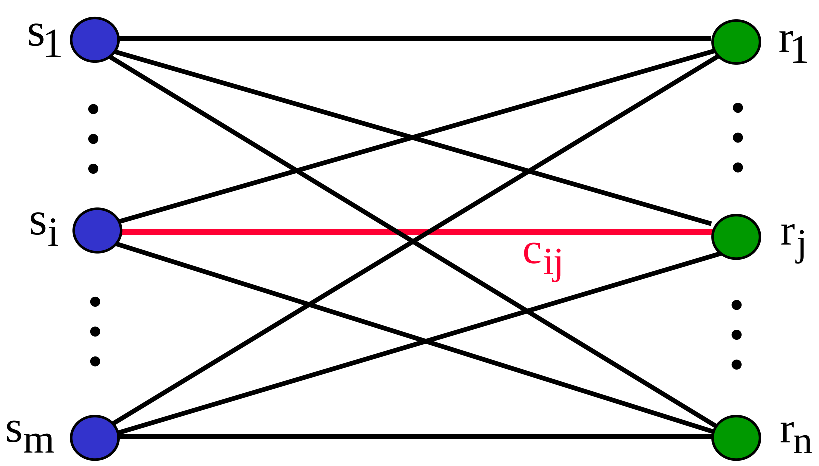
Consideriamo i seguenti problemi decisionali ed esaminiamo come possono essere formulati come problemi di PL:

- Il problema del trasporto
- Il problema del “product-mix”
- Il problema della pianificazione della produzione (production planning)

Il Problema del Trasporto

- m fonitori producono $s_1, \ldots, s_m$ quantità di un certo prodotto (ad esempio, gas o petrolio)
- n destinatari richiedono $r_1, \ldots, r_n$ quantità di prodotto
- il prodotto può essere trasportato da ogni fornitore ad ogni destinatario (ad esempio attraverso un gasdotto o oleodotto)
- per ogni unità di prodotto trasportata dal fornitore i al cliente j viene pagato un costo c_{ij}

<u>Il problema</u>: determinare quali quantità di prodotto trasportare tra ogni coppia (i,j) di fornitori-destinatari in modo da minimizzare il costo complessivo del trasporto.



Ipotesi di ammissibilità

Perché il problema possa ammettere una soluzione deve essere verificata la seguente condizione sui dati

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \geq \sum_{j=1}^{n} r_j$$

che stabilisce che la quantità totale di prodotto disponibile non può essere inferiore alla richiesta totale del prodotto stesso.

Formulazione del problema.

Le variabili:

la quantità di prodotto trasportata su ciascun arco

$$x_{ij} \in \mathbf{R} \qquad i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n$$

sono variabili continue

La funzione obiettivo:

il costo del trasporto complessivo

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

I vincoli:

- la quantità totale di prodotto fornita da ciascun fornitore non può superare la disponibilità del fornitore stesso

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i \quad i = 1,\ldots,m \quad (1)$$

- la quantità totale di prodotto ricevuta da ciascun destinatario deve essere uguale a quella richiesta

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = r_j \quad j = 1,\ldots,n \quad (2)$$

- le quantità di prodotto trasportate sugli archi sono sempre non negative

$$x_{ij} \geq 0 \ i = 1,..,m; \ j = 1,\ldots,n \quad (3)$$

Il problema del trasporto

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i \quad i = 1,\dots,m \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = r_j \quad j = 1,\dots,n \qquad (2)$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n \qquad (3)$$

$$x_{ij} \in \mathbf{R} \quad i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n$$

- E' un problema di PL con variabili continue.
- Può essere risolto con l'algoritmo del simplesso.
- Possibili variazioni:
    - introduzione della massima capacità per gli archi;
    - non tutti i fornitori sono connessi a tutti i destinatari;
    - il trasporto non avviene direttamente tra fornitore e destinatario ma attraverso dei centri di raccolta e distribuzione intermedi

Il Problema del Product-Mix

- si dispone di m risorse produttive in quantità limitata, in particolare, la loro massima disponibilità è $b_1, \ldots, b_m$ (ad esempio, materie prime)
- possono essere eseguite n attività che necessitano delle risorse precedenti (ad esempio, la produzione di n diversi prodotti)
- alle n attività sono associati i seguenti profitti unitari $c_1, \ldots, c_n$ (ad esempio, il profitto per unità di prodotto)
- sono noti i consumi di risorse per unità di attività eseguita; in particolare, per eseguire una unità della attività i-esima si utilizzano a_{ij} unità della risorsa j-esima

Il problema: determinare quali attività eseguire ed a quale livello (ad esempio, quali e quanti prodotti produrre) in modo da massimizzare il profitto conseguente.

(Nota: a questa classe di problemi appartiene il problema dell'azienda che produce vernici.)

Formulazione del problema.

Le variabili:

i livelli a cui devono essere eseguite le attività (variabili continue)

$$x_i \in \mathbf{R} \qquad i = 1,\ldots,n$$

La funzione obiettivo:

il profitto risultante dall'esecuzione delle attività

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

I vincoli:

- per ciascuna risorsa, la quantità totale di risorsa utilizzata per eseguire le attività non può superare la disponibilità massima della risorsa stessa

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j \qquad j = 1,\ldots,m \quad (1)$$

- i livelli delle attività sono sempre non negativi

$$x_i \geq 0 \ \ i = 1,..,n \qquad (2)$$

Il problema del product-mix

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j \quad j = 1,\dots,m \qquad (1)$$

$$x_i \ge 0 \quad i = 1,\dots,n \qquad (2)$$

$$x_i \in \mathbf{R} \quad i = 1,\dots,n$$

Il Problema della pianificazione della produzione (Production Planning)

Caso considerato: pianificare la produzione di un singolo prodotto per i prossimi N mesi.

- per ciascuno degli N mesi è nota la capacità produttiva massima del prodotto, $m_1,...,m_N$
- sono noti $c_1,...,c_N$, i costi di produzione per unità di prodotto nei diversi mesi
- sono noti $r_1,...,r_N$, i costi di immagazzinamento per unità di prodotto nei diversi mesi
- è nota la domanda di prodotto per i diversi mesi, $d_1,...,d_N$
- è nota la disponibilità iniziale di prodotto in magazzino M_0

Il problema: determinare la quantità di prodotto da produrre nei diversi mesi minimizzando il costo complessivo di produzione e di immagazzinamento.

Formulazione del problema.

Le variabili:

- la quantità di prodotto pianificata per ciascun mese (variabili continue)

$$x_i \in \mathbf{R} \qquad i = 1,\dots,N$$

- la quantità di prodotto che deve essere immagazzinata per ciascun mese (variabili continue)

$$s_i \in \mathbf{R} \qquad i = 1,\dots,N$$

La funzione obiettivo:

il costo totale pagato per la produzione più quello pagato per l'immagazzinamento durante l'arco degli N mesi

$$\sum_{i=1}^{N} \left(c_i x_i + r_i s_i \right)$$

I vincoli:

- per ciascun mese, la quantità il prodotto disponibile (prodotto nel mese o presente perchè immagazzinato il mese precedente) soddisfa la domanda corrente; l'eventuale rimanenza viene immagazzinata e resa disponibile per il mese successivo (legge di conservazione del prodotto)

$$x_i + s_{i-1} = d_i + s_i \quad i = 1,\dots,N \quad (1)$$

- la produzione mensile non può superare la relativa capacità produttiva

$$x_i \le m_i \quad i = 1,\dots,N \quad (2)$$

- il livello iniziale del magazzino è quello dato

$$s_0 = M_0 \qquad (3)$$

- il livello di produzione e la quantità di prodotto in magazzino nei vari mesi non può essere negativa

$$x_i \ge 0 \quad s_i \ge 0 \quad i = 1,..,N \qquad (4)$$

Il problema del production planning (singolo prodotto)

$$\boxed{\begin{array}{lr} \min \sum_{i=1}^{N} (c_i x_i + r_i s_i) & \\ \quad x_i + s_{i-1} - s_i = d_i \; i = 1,\dots,N & (1) \\ \quad x_i \le m_i \; i = 1,\dots,N & (2) \\ \quad s_0 = M_0 & (3) \\ \quad x_i \ge 0 \; s_i \ge 0 \; i = 1,\dots,N & (4) \\ \quad x_i \in \mathbf{R} \; s_i \in \mathbf{R} \; i = 1,\dots,N & \end{array}}$$

Una possibile variante consiste nel considerare la produzione di n diversi prodotti.