Esempi di Problemi di Programmazione Lineare

Esempio 1: Soluzione con l'algoritmo del simplesso dell'esempio in forma standard

$$\max x_0 = 2x_1 + x_2$$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 &= 21 \end{aligned}$$
$$x_1 \geq 0 \;\; x_2 \geq 0 \;\; x_3 \geq 0 \;\; x_4 \geq 0 \;\; x_5 \geq 0$$

Il problema può essere inizializzato usando le variabili di slack.

$$\underline{x}_B^6 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix}$$

è la base iniziale (degenere).

Il tableau iniziale

entrante

	x_3	x_4	x_5	$\boxed{x_1}$	x_2		
x_0	0	0	0	-2	-1	0	
x_3	1	0	0	1	1	5	$5/1$
x_4	0	1	0	-1	1	0	–
uscente $\boxed{x_5}$	0	0	1	$\boxed{6}$	2	21	$21/6 = 7/2$

il Pivot

1^a iterazione: x_1 entra in base x_5 esce dalla base

Il tableau dopo la 1ª iterazione.

nuovo valore obiettivo

il Pivot entrante

	x_3	x_4	x_5	x_1	$\boxed{x_2}$	
x_0	0	0	1/3	0	−1/3	$\boxed{7}$
uscente $\boxed{x_3}$	1	0	−1/6	0	$\boxed{2/3}$	3/2
x_4	0	1	1/6	0	4/3	7/2
x_1	0	0	1/6	1	1/3	7/2

$3/2 \cdot 3/2 = 9/4\,(= 2{,}25)$

$7/2 \cdot 3/4 = 21/8\,(= 2{,}62)$

$7/2 \cdot 3 = 21/2\,(= 10{,}5)$

2ª iterazione: x_2 entra in base x_3 esce dalla base

Il tableau dopo la 2ª iterazione.

valore ottimo obiettivo

coeff. non negativi

	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	
x_0	1/2	0	1/4	0	0	$\boxed{31/4}$
x_2	3/2	0	−1/4	0	1	9/4
x_4	−2	1	1/2	0	0	1/2
x_1	−1/2	0	1/4	1	0	11/4

base ottima

soluzione ottima

Il tableau è ottimo!

Esempio 2: L'azienda che produce vernici.

$$\begin{aligned}
\max\ Z &= 3x_E + 2x_I \\
x_E + 2x_I &\le 6 \\
2x_E + x_I &\le 8 \\
-x_E + x_I &\le 1 \\
x_I &\le 2 \\
x_E \ge 0 \quad & x_I \ge 0
\end{aligned}$$

Deve essere trasformato in forma standard.

$$\begin{aligned}
\max\ Z &= 3x_E + 2x_I \\
x_E + 2x_I + s_1 &= 6 \\
2x_E + x_I + s_2 &= 8 \\
-x_E + x_I + s_3 &= 1 \\
x_I + s_4 &= 2 \\
x_E \ge 0, x_I \ge 0, s_1 \ge 0, & s_2 \ge 0, s_3 \ge 0, s_4 \ge 0
\end{aligned}$$

Forma standard: n=6, m=4

Il problema può essere inizializzato usando le variabili di slack.

$$\underline{x}_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La base iniziale

Il tableau iniziale

entrante

il Pivot

uscente

	$\boxed{x_E}$	x_I	s_1	s_2	s_3	s_4		
z	-3	-2	0	0	0	0	0	
s_1	1	2	1	0	0	0	6	$6/1$
$\boxed{s_2}$	$\boxed{2}$	1	0	1	0	0	8	$8/2$
s_3	-1	1	0	0	1	0	1	–
s_4	0	1	0	0	0	1	2	–

1ª iterazione: x_E entra in base s_2 esce dalla base

Il tableau dopo la 1ª iterazione.

il Pivot

entrante

uscente

	x_E	$\boxed{x_I}$	s_1	s_2	s_3	s_4		
z	0	$-1/2$	0	$3/2$	0	0	12	
$\boxed{s_1}$	0	$\boxed{3/2}$	1	$-1/2$	0	0	2	$2 \cdot 2/3 = 4/3$
x_E	1	$1/2$	0	$1/2$	0	0	4	$4 \cdot 2 = 8$
s_3	0	$3/2$	0	$1/2$	1	0	5	$5 \cdot 2/3 = 10/3$
s_4	0	1	0	0	0	1	2	2

2ª iterazione: x_I entra in base s_1 esce dalla base

Il tableau dopo la 2ª iterazione.

valore ottimo obiettivo

coeff. non negativi

	x_E	x_I	s_1	s_2	s_3	s_4	
z	0	0	$1/3$	$4/3$	0	0	$38/3$
x_I	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	0	$4/3$
x_E	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	0	$10/3$
s_3	0	0	-1	1	1	0	3
s_4	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	$2/3$

base ottima

soluzione ottima

Il tableau è ottimo!

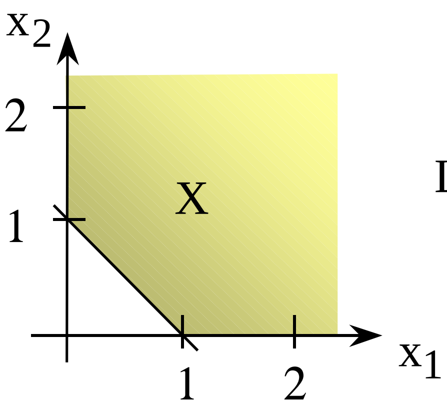
Esempio 3: Soluzione illimitata.

Un problema molto semplice:

$$\max\ x_0 = x_1$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

In forma standard

$$\max\ x_0 = x_1$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$



La regione di ammissibilità X è aperta

Il problema ha n=3, m=1

Adottiamo il punto (1,0) come soluzione di base iniziale.

$$\underline{x}_B = [x_1] = [1] \qquad \underline{x}_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Costruendo il tableau iniziale si nota che l'obiettivo deve essere espresso in funzione delle variabili fuori base (si deve eliminare x_1).

le variabili in base
devono avere coeff.
nullo nell'obiettivo

	x_1	x_2	x_3	
x_0	-1	0	0	0
x_1	1	1	-1	1

Il tableau iniziale si ricava eliminando x_1 dalla riga dell'obiettivo.

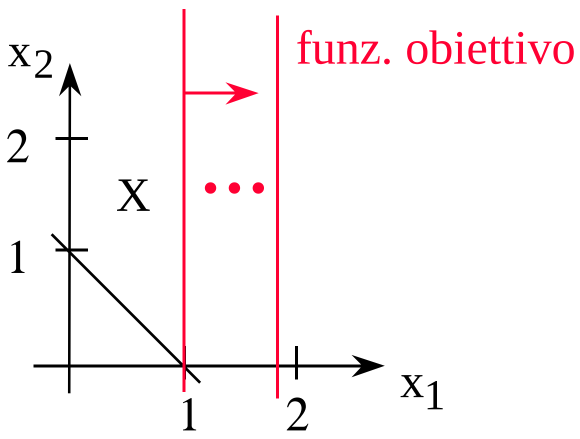
	x_1	x_2	x_3	
x_0	0	1	-1	1
x_1	1	1	-1	1

ora anche il valore
dell'obiettivo è corretto

la variabile x_3 entra in base
senza mai violare il vincolo.

La soluzione ottima è all'infinito.

Aumentando x_3 ci si muove lungo l'asse x_1 (direzione estrema).



Quante sono le possibili direzioni estreme di un poliedro X?

$$A\underline{d} = \underline{0} \Rightarrow [B|N]\begin{bmatrix} \underline{d}_B \\ \underline{d}_N \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow B\underline{d}_B + N\underline{d}_N = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{d}_B = -B^{-1}N\underline{d}_N$$

quindi è possibile fissare arbitrariamente $\underline{d}_N$ e calcolare una direzione estrema come

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} \underline{d}_B \\ \underline{d}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^{-1}N\underline{d}_N \\ \underline{e}_j \end{bmatrix}$$

Una scelta possibile è fissare

$$\underline{d}_N = \underline{e}_j = \begin{array}{c|l} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ \\ j-\text{esimo} \\ \\ n-m \end{array} \end{array} \quad \underline{e}_j \in \mathbf{R}^{n-m} \quad \Rightarrow \underline{d} = \begin{bmatrix} -B^{-1}\underline{a}_j \\ \underline{e}_j \end{bmatrix}$$

dove $\underline{a}_j$ è la j-esima colonna di N.

Per ogni matrice B possono essere scelti n-m vettori $\underline{a}_j$ distinti.
Quindi il numero massimo di possibili direzioni estreme è

$$(n-m)\binom{n}{m}$$

Nell'esempio l'asse di x_1 corrisponde a

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} -B^{-1}\underline{a}_j \\ \underline{e}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (j = 2)$$

Si può verificare che

$$A\underline{d} = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - 1 = 0 \qquad (n = 3, m = 1)$$

La possibilità di avere soluzioni ottime finite è regolata dal seguente teorema

6. Teorema

Dato il problema di PL

$$\max \quad x_0 = \underline{c}^T \underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

siano $\underline{d}_j$, j=1,...,D le direzioni estreme del poliedro X non vuoto dei vincoli.

Condizione necessaria e sufficiente perchè esista soluzione ottima finita è

$$\underline{c}^T \underline{d}_j \leq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, D$$

in tal caso l'ottimo coincide con un punto estremo di X.

Esempio 4: Inizializzazione con il "Two-phases method" .

$$\begin{aligned} \min\ x_0 &= 4x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

in forma standard

$$\begin{aligned} \max\ x_0 &= -4x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 &= 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

I Fase (Definizione e soluzione del problema ausiliario)

$$\min\ z = y_1 + y_2 \qquad \Rightarrow \max\ z = -y_1 - y_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \qquad\qquad + y_1 \qquad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad\qquad + y_2 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad &= 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
z	0	0	0	0	1	1	0
y_1	3	1	0	0	1	0	3
y_2	4	3	−1	0	0	1	6
x_4	1	2	0	1	0	0	4

si devono eliminare le var. di base dalla riga dell'obiettivo

Il tableau iniziale

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
z	−7	−4	1	0	0	0	−9
y_1	3	1	0	0	1	0	3
y_2	4	3	−1	0	0	1	6
x_4	1	2	0	1	0	0	4

Il tableau finale

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
z	0	0	0	0	1	1	0
x_1	1	0	1/5	0	3/5	−1/5	3/5
x_2	0	1	−3/5	0	−4/5	3/5	6/5
x_4	0	0	1	1	1	−1	1

con questi valori può essere inizializzato il tableau del problema originale

II Fase (Inizializzazione e soluzione del problema originale)

si devono eliminare le var. di base dalla riga dell'obiettivo

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_0	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	0	0	0
x_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$
x_2	0	1	$-3/5$	0	$6/5$
x_4	0	0	1	1	1

Il tableau iniziale del problema originale

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_0	0	0	$-1/5$	0	$-18/5$
x_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$
x_2	0	1	$-3/5$	0	$6/5$
x_4	0	0	1	1	1