Il Tableau

L’algoritmo del simplesso può essere eseguito utilizzando una tabella, detta Tableau, in cui vengono disposti i coefficienti della funzione obiettivo e dei vincoli.
Tali coefficienti sono quelli delle equazioni (5) in cui tutte le variabili sono state portate al primo membro:

$$x_{B_i} + \sum_{j \in R} y_{ij} x_j = y_{i0} \qquad \forall i = 0,1,\dots,m$$

coeff. dell’obiettivo

valore dell’obiettivo (soluzione corrente)

nomi delle variabili in base

nomi delle variabili fuori base

	x_{B_1}	$\cdots$	x_{B_r}	$\cdots$	x_{B_m}	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_k	$\cdots$	
x_0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{0j}	$\cdots$	y_{0k}	$\cdots$	y_{00}
x_{B_1}	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{1j}	$\cdots$	y_{1k}	$\cdots$	y_{10}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{B_r}	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{rj}	$\cdots$	y_{rk}	$\cdots$	y_{r0}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{B_m}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	y_{mj}	$\cdots$	y_{mk}	$\cdots$	y_{m0}

coeff. delle variabili in base

valori delle variabili in base (soluzione corrente)

coeff. delle variabili fuori base

L'algoritmo del simplesso applicato al Tableau

1. Inizializzazione.
   Costruire il tableau iniziale con una soluzione di base ammissibile.

2. Verifica dell'ottimalità.
   Se nella riga di x_0 non esistono coefficienti negativi la soluzione corrente è ottima e l'algoritmo termina. Altrimenti andare al passo 3.

3. Scelta della variabile entrante in base.
   Scegliere una variabile fuori base x_k tale che $y_{0k}<0$ (ad esempio, scegliere il coefficiente più piccolo), ed andare al passo 4.

4. Scelta della variabile uscente dalla base.
   Se tutti i coefficienti nella colonna di x_k sono $y_{ik} \leq 0 \quad \forall i = 1,\ldots,m$ non esiste ottimo finito e l'algoritmo termina. Altrimenti calcolare i rapporti
   $$\frac{y_{i0}}{y_{ik}} \quad i = 1,\ldots,m$$
   tra i coeff. dell'ultima colonna con i coeff. positivi della colonna di x_k, e scegliere la riga r-esima associata al rapporto più piccolo.
   Il coeff. y_{rk} è il pivot.

5. Pivoting.
   Portare in base x_k al posto di x_{B_r} dividendo la riga r-esima per il pivot, quindi sottraendo la nuova riga r alle altre righe del tableau, obiettivo incluso, dopo averla moltiplicata per il corrispondente coeff. della colonna k. In questo modo la nuova colonna k sarà formata da tutti coeff. nulli tranne il coeff. r-esimo uguale ad 1. Scambiare i nomi delle variabili x_k e x_{B_r}. Andare al passo 2.

L'inizializzazione dell'algoritmo del simplesso

Il problema dell'inizializzazione corrisponde a verificare se il problema di PL ammette soluzione, ed in caso positivo a determinarne una.

Inizializzazione con variabili di slack.

Un caso semplice è quello in cui tutti i vincoli sono disuguaglianze $\leq$.

$$A\,\underline{x} \leq \underline{b} \Rightarrow A\,\underline{x} + I\underline{s} = \underline{b} \Rightarrow [A|I]\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{s}\end{bmatrix} = \underline{b}$$

quindi si può scegliere B=I come base iniziale, corrispondente alla soluzione ammissibile

$$\begin{bmatrix}\underline{x}_B\\ \underline{x}_N\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{s}\\ \underline{x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{b}\\ \underline{0}\end{bmatrix}$$

In generale, tutte le volte che la matrice A contiene una matrice identica I come minore mxm è possibile scegliere B=I come base iniziale, e mettere nella base iniziale le m variabili corrispondenti alle colonne di I.

Metodi generali di inizializzazione.

Esistono due metodi generali:

a) Il metodo a due fasi ("Two-Phases" Method)

b) Il metodo del "Big-M" (o delle penalità)

Il metodo a due fasi

E' un metodo che può essere usato per verificare l'esistenza di soluzioni in un sistema di disuguaglianze.

E' dato il problema (P)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_0 = \underline{c}^T \underline{x} \\
& A\underline{x} = \underline{b} \\
& \underline{x} \geq \underline{0}
\end{aligned}
$$

I Fase (Definizione e soluzione del problema ausiliario)

Si definisce un problema ausiliario (A)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = \underline{1}^T \underline{y} = \sum_{j=1}^{m} y_i \\
& A\underline{x} + I\underline{y} = \underline{b} \\
& \underline{x} \geq \underline{0} \quad \underline{y} \geq \underline{0}
\end{aligned}
\qquad \text{dove} \qquad
\underline{1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ m \end{array}
$$

Posto $\underline{z} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{x} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{m var.} \\ \text{n var.} \end{array}$

è sempre possibile definire come soluzione di base iniziale per (A)

$$
\begin{bmatrix} \underline{z}_B \\ \underline{z}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{0} \end{bmatrix}
$$

quindi risolvere (A) con l'algoritmo del simplesso.

II Fase (Inizializzazione e soluzione del problema originale)

Se la soluzione ottima di (A) è tale che z=0, allora nessuna variabile y_i, i=1,...,m, è rimasta in base all'ottimo, ed in tal caso il problema originale (P) ammette soluzione.

Infatti, sia $\underline{z}^* = \begin{bmatrix} \underline{y}^* \\ \underline{x}^* \end{bmatrix}$ la soluzione ottima di (A), con $\underline{y}^* = \underline{0}$.

Allora $A\underline{x}^* + I\underline{y}^* = \underline{b} \Rightarrow A\underline{x}^* = \underline{b}$ quindi $\underline{x}^*$ è anche soluzione di (P)

e può essere usata come soluzione iniziale per risolvere (P).

Se invece z>0, allora qualche variabile y_i, i=1,...,m, è rimasta in base all'ottimo, ed assume valore positivo.

In questo caso il problema originale (P) non ammette soluzione.

Se, infatti, fosse stato possibile determinare un vettore $\underline{x}$ tale da soddisfare i vincoli di (P), la soluzione di (A) lo avrebbe certamente utilizzato per annullare (quindi minimizzare) l'obiettivo z.

Il metodo del “Big-M”

Con questo metodo si introducono delle variabili ausiliarie come nel metodo a due fasi.
Quindi si risolve una versione modificata del problema originale, penalizzando nella funzione obiettivo le variabili ausiliarie.

E’ dato il problema (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & x_0 = \underline{c}^T \underline{x} \\ & A\underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

Si costruisce una versione modificata (P’) del problema (P) introducendo m variabili ausiliarie (una variabile per vincolo)

$$\begin{aligned} \max \quad & \underline{c}^T \underline{x} - M\underline{1}^T \underline{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - M \sum_{j=1}^{m} y_j \\ & A\underline{x} + I\underline{y} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \quad \underline{y} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

dove $\underline{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ m \end{matrix}$ e M è un coeff. scalare tale che $M >> |c_i|, |b_j|, |a_{ij}| \quad \forall i, j$

Posto $\underline{z} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{x} \end{bmatrix}$ una soluzione di base iniziale per (P’) è

$$\begin{bmatrix} \underline{z}_B \\ \underline{z}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

Risolvendo (P’) le variabili y_j, penalizzate dai “big-M” nell’obiettivo, sono forzate ad uscire dalla base.

Se nella soluzione ottima di (P’) tutte le y_j sono fuori base, si ha che

$$\underline{z}^* = \begin{bmatrix} \underline{y}^* \\ \underline{x}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{x}^* \end{bmatrix} \Rightarrow A\underline{x}^* + I\underline{y}^* = \underline{b} \Rightarrow A\underline{x}^* = \underline{b}$$

il vettore $\underline{x}^*$ è anche la soluzione ottima di (P).

Rispetto al metodo a due fasi risolvere il problema (P’) equivale a risolvere il problema originale (P).