Introduzione alla Programmazione Lineare Intera:

Formulazione ideale
Inviluppo convesso
Disuguaglianze valide e tagli
Tagli di Chvatál Gomory

21/1/04

Pietro Belotti

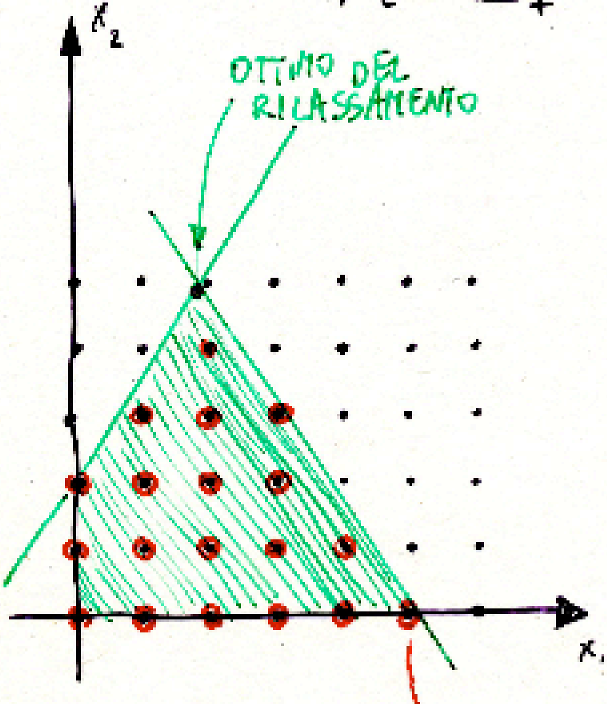
PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA (PLI)

$$(P) \quad \min \; cx$$
$$Ax \geq b$$
$$x \in \mathbb{Z}^n_+$$

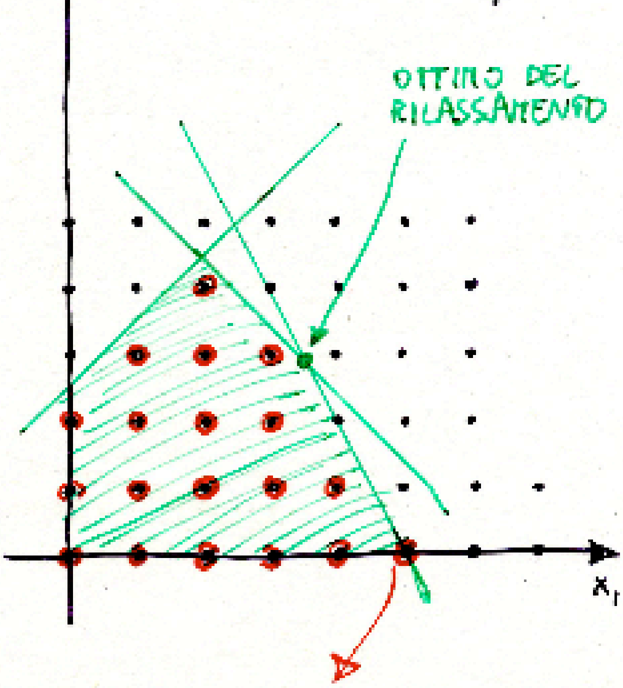
- IL VINCOLO DI INTEGRALITÀ COMPLICA MOLTO IL PROBLEMA
- L'INSIEME DELLE SOLUZIONI NON È PIÙ CONVESSO
- NON SI POSSONO USARE GLI STESSI METODI DELLA P. LINEARE

ESEMPIO

$$\max \; x_1 + 0.64\, x_2$$
$$50x_1 + 31x_2 \leq 250$$
$$3x_1 - 2x_2 \geq -4$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^2_+$$

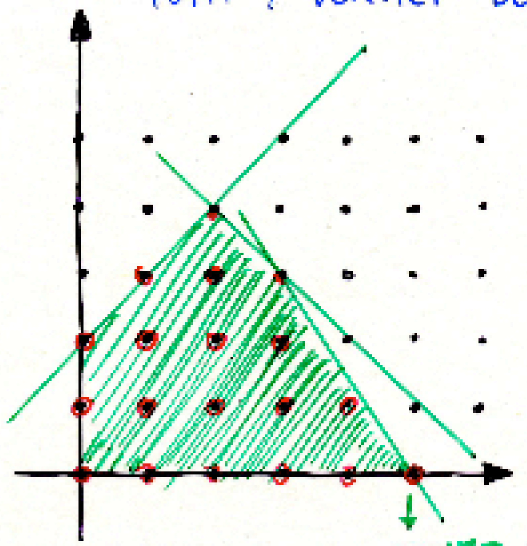


$$\max \; x_1 + 0.64\, x_2$$
$$7x_1 + 4x_2 \leq 35$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 13$$
$$2x_1 - 2x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^2_+$$



OTTIMO DEL PROBLEMA INTERO

- POTREMMO USARE UN METODO PER LA P.L. SE TUTTI I VERTICI DEL POLIEDRO FOSSERO INTERI

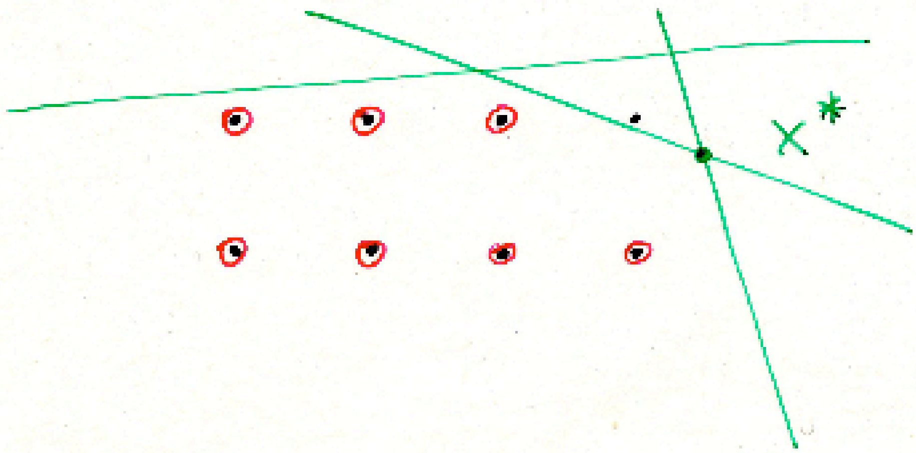


$$\max \; x_1 + 0.66\, x_2$$
$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 15$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

OTTIMO DEL P. INTERO = OTTIMO DEL RILASS.

- CHIAMIAMO INVILUPPO CONVESSO DI UN PROBLEMA (P) INTERO IL PIÙ PICCOLO POLIEDRO CHE CONTIENE LE SOLUZIONI DI (P)
- DATO UN PROBLEMA (P), CERCARNE L'INVILUPPO CONVESSO PUÒ ESSERE MOLTO DIFFICILE

$\Rightarrow$ SI PONE L'ATTENZIONE <u>SOLO</u> INTORNO ALLA SOLUZIONE DEL RILASSAMENTO



- ABBIAMO UN PROBLEMA INTERO E RIUSCIAMO AGEVOLMENTE A RISOLVERNE IL RILASSAMENTO LINEARE; OTTENIAMO x^*.

DEF: UNA DISUGUAGLIANZA $ax \le \beta$ È DETTA **VALIDA** SE È RISPETTATA DA TUTTI I PUNTI $\{x : Ax \ge b,\ x \in \mathbb{Z}^n_+\}$

DEF: $ax \le \beta$ È UN **TAGLIO** PER x^* SE x^* LA VIOLA: $ax^* > \beta$

PROPRIETÀ DELLE DISUGUAGLIANZE VALIDE

1. UNA COMBINAZIONE LINEARE NON NEGATIVA DI DISUGUAGLIANZE VALIDE È ANCH'ESSA VALIDA

ES.

$$\begin{array}{rcll} 3x_1 + 2x_2 & \le & 15 & (\times 1) \\ -x_1 + x_2 & \le & 2 & (\times 3) \\ \hline // \quad 5x_2 & \le & 21 & \text{VALIDA} \end{array}$$

2. SE $ax \le \beta$ È VALIDA E a È INTERO ALLORA $ax \le \lfloor \beta \rfloor$ È VALIDA

OVVIAMENTE È UTILE SOLO QUANDO β NON È INTERO

3. SE $\alpha x \le \beta$ È VALIDA, ANCHE

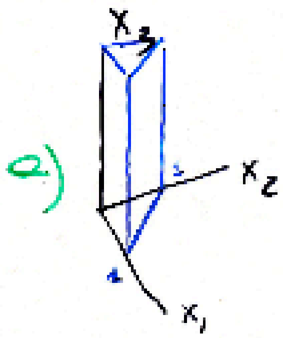
$$\lfloor \alpha \rfloor x \le \lfloor \beta \rfloor$$

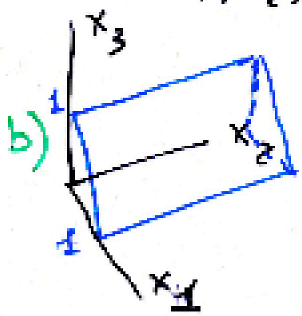
DISUGUAGLIANZA DI CHVÁTAL

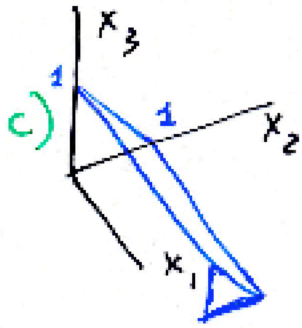
È VALIDA. INFATTI $\lfloor \alpha \rfloor x \le \alpha x \le \beta$ E $\lfloor \alpha \rfloor$ È INTERO QUINDI PER LA PROP. 2 $\lfloor \alpha \rfloor x \le \lfloor \beta \rfloor$

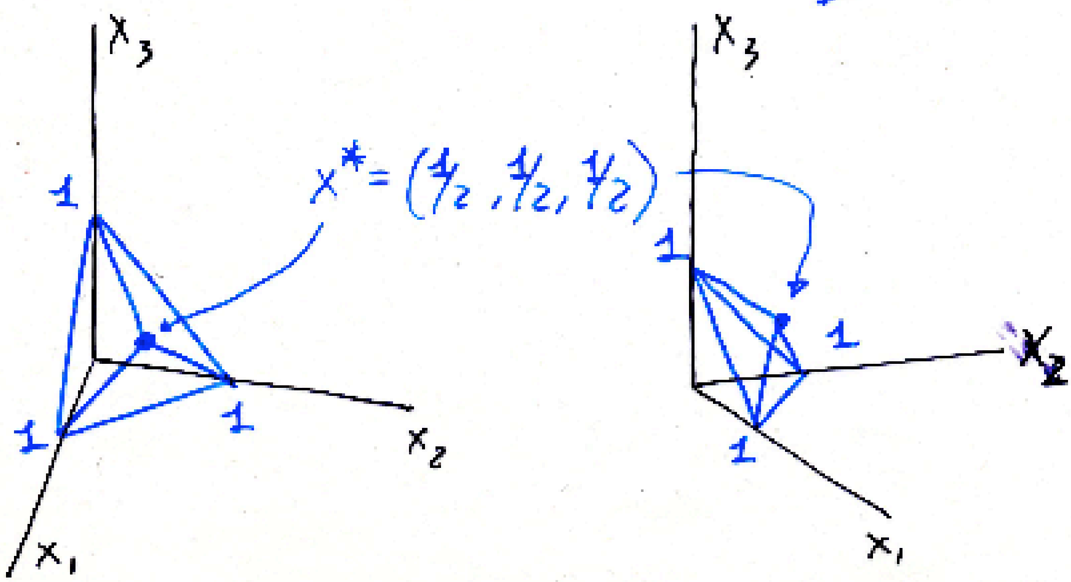
ESEMPIO

$$
\begin{array}{llr}
\max & 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 & \\
& x_1 + x_2 \le 1 & (a) \\
& x_1 + x_3 \le 1 & (b) \\
& x_2 + x_3 \le 1 & (c) \\
& x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}^+ &
\end{array}
$$







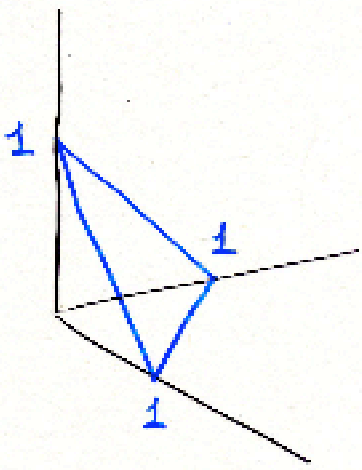


APPLICHIAMO LA PROP. 1, CONSIDERIAMO LA COMBINAZIONE LINEARE NON NEGATIVA $\frac{1}{2}((a)+(b)+(c))$:

$$\frac{1}{2}(2x_1+2x_2+2x_3) \leq \frac{1}{2}(3)$$

PROP. 2 $\quad x_1+x_2+x_3 \leq 3/2 \quad$ È VALIDA

$\Longrightarrow \quad x_1+x_2+x_3 \leq 1 \quad$ È VALIDA



AGGIUNGENDO QUESTA SOLA DISUGUAGLIANZA OTTENIAMO L'INVILUPPO CONVESSO DEL PROBLEMA

NON È AFFATTO FACILE TROVARE TAGLI PER OGNI PROBLEMA, MA ESISTONO TAGLI CHE POSSONO ESSERE APPLICATI A QUALUNQUE PROBLEMA

TAGLI DI GOMORY

CONSIDERIAMO UN PROBLEMA ESPRESSO IN FORMA STANDARD

$$(P) \quad \min \; cx \qquad Ax = b \qquad x \geq 0$$

A È UNA MATRICE $(m \times n)$ CON $m < n$

SCOMPONIAMO A IN $(B|N)$ DOVE B $(m \times m)$ È INVERTIBILE OVVERO $|B| \neq 0$. ANALOGAMENTE SCOMPONIAMO x in $(x_B \mid x_N)^T$. ABBIAMO SEMPLICEMENTE SCELTO UN SOTTOINSIEME DI m COLONNE, CHIAMATO <u>BASE</u>

I VINCOLI $Ax = b$ SONO EQUIVALENTI A

$$(B \mid N)\,(x_B \mid x_N)^T = b$$

$$Bx_B + Nx_N = b$$

$$x_B + \underbrace{B^{-1}N}_{\bar{A}}x_N = \underbrace{B^{-1}b}_{\bar{b}}$$

È FACILE DIMOSTRARE CHE, SE $B^{-1}b \geq 0$, ALLORA $x^* = (B^{-1}b \mid 0)^T$ È UNA SOLUZIONE DI (P). INFATTI

$$Ax^* = (B|N)\,(B^{-1}b \mid 0)^T = B \cdot B^{-1} \cdot b + N \cdot 0 = b$$

SE x^* È INTERA, È ANCHE SOLUZIONE DEL PROBLEMA INTERO. ALTRIMENTI ESISTE UN ELEMENTO FRAZIONARIO x^*_h. DATO CHE x^* È AMMISSIBILE, POSSIAMO DIRE CHE

$$x^*_h + \cancel{\sum_{j \in N} \bar{a}_{hj} x^*_j} = \bar{b}_h \rightarrow x^*_h = \bar{b}_h$$

FRAZIONARI

PER LA PROPRIETÀ 3, SICCOME

$$x_h + \sum_{j \in N} \bar{a}_{hj} x_j = \bar{b}_h$$

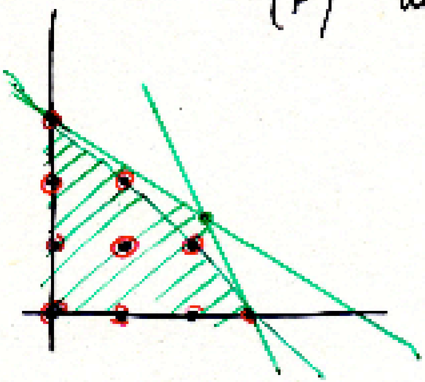
È VALIDA, ANCHE

(TAGLIO DI GOMORY) $$x_h + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_h \rfloor$$

È VALIDA. DIMOSTRIAMO CHE È PURE UN <u>TAGLIO</u>:

$$x^*_h + \cancel{\sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor x^*_j} = x^*_h = \bar{b}_h > \lfloor \bar{b}_h \rfloor$$

ESERCIZIO



$$(P) \quad \max \quad 7x_1 + 8x_2$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$

RILASSIAMOLO E METTIAMOLO IN FORMA STANDARD

$$(R) \quad \max \quad 7x_1 + 8x_2$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 6$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1..4$$

COSÌ APPARE IL PROBLEMA SE SCEGLIAMO $B = (x_3, x_4)$ E $N = (x_1, x_2)$. SE INVECE $B = (x_1, x_2)$ E $N = (x_3, x_4)$ OTTENIAMO

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E IL PROBLEMA SI PUÒ SCRIVERE

$$x_1 \qquad - \tfrac{1}{4} x_3 + \tfrac{3}{4} x_4 = \tfrac{9}{2}$$
$$x_2 + \tfrac{1}{2} x_3 - \tfrac{1}{2} x_4 = \tfrac{3}{2}$$

OTTENIAMO I DUE TAGLI DI GOMORY

$$x_1 - x_3 \leq 4$$
$$x_2 - x_4 \leq 1$$

X_3 E X_4 SONO VARIABILI AUSILIARIE RICAVABILI DA (R), QUINDI LE DISUGUAGLIANZE DIVENTANO

$$x_1 - (9 - 2x_1 - 3x_2) \leq 4$$
$$x_2 - (6 - 2x_1 - x_2) \leq 1$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 13$$
$$2x_2 + 2x_1 \leq 7$$

IN TEORIA POTREMMO FERMARCI, MA:

$$x_1 + x_2 \leq 13/3 \rightarrow x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 + x_2 \leq 7/2 \rightarrow x_1 + x_2 \leq 3$$