Programmazione Lineare

1 Programmazione lineare

I problemi di programmazione lineare sono caratterizzati da una *funzione obiettivo* lineare nelle *variabili decisionali*, e dei *vincoli* descritti da disequazioni o equazioni lineari. Volendo dare una interpretazione geometrica nello spazio delle variabili (come abbiamo fatto nell'esempio sviluppato all'inizio del capitolo 1) i vincoli individuano *semispazi* (caso di disuguaglianze) oppure *iperpiani* (caso di uguaglianze). Le "curve di livello" della funzione obiettivo (ovvero i punti di uguale valore) individuano degli iperpiani.

Un problema di questo tipo viene detto problema di *Programmazione Lineare* (*PL*). In modo formale, un problema di Programmazione Lineare è un problema di ottimizzazione (di massimo o di minimo) definito su variabili x che assumono valori in $\boldsymbol{R}^n$ caratterizzato dalle seguenti proprietà:

i) la funzione obiettivo $c(x)$: $\boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}$ è lineare, cioè soddisfa le relazioni $c(0)=0$, $c(\alpha x+\beta y) = \alpha c(x)+\beta c(y)$, $\forall x, y \in \boldsymbol{R}^n$, $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$;

ii) la regione ammissibile è definita da un insieme finito di vincoli lineari del tipo $h(x) = \gamma$, e/o $h(x) \leq \gamma$, e/o $h(x) \geq \gamma$, dove $h(x)$: $\boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}$ è una funzione lineare e $\gamma \in \boldsymbol{R}$.

Un problema di *PL* può essere espresso in modo sintetico per mezzo della seguente formulazione, in cui A è una matrice reale $m \times n$, $b \in \boldsymbol{R}^m$ e $x \in \boldsymbol{R}^n$:

$$\begin{aligned} \max\ & cx \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Nel seguito useremo le seguenti notazioni:

- se a e b sono vettori delle stesse dimensioni ab denota il loro prodotto scalare;
- se A è una matrice mxn e b un vettore di dimensione n [m], Ab [bA] denota il prodotto di A per b [b per A] inteso come matrice colonna [riga][(1)].

Scrivendo il problema del coltivatore visto nel capitolo 1 in forma matriciale, otteniamo:

$$\begin{aligned} \max\ & [3000, 5000]\begin{bmatrix} x_L \\ x_P \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 0 \\ 0 & 3 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_L \\ x_P \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 12 \\ 70 \\ 18 \\ 160 \end{bmatrix}, \\ & x_L, x_P \geq 0. \end{aligned}$$

Un qualsiasi problema di *PL* può essere agevolmente ricondotto alla forma di massimo con vincoli di maggiore o uguale e variabili non negative, o in qualsiasi altra forma, per mezzo delle seguenti equivalenze, in parte già viste nel capitolo 1:

$$\max \textstyle\sum_j c_j x_j \equiv -\min \textstyle\sum_j (-c_j) x_j$$

$$\textstyle\sum_j a_{ij} x_j = b_i \equiv \begin{cases} \sum_j a_{ij} x_j & \leq \quad b_i \qquad \sum_j (-a_{ij}) x_j \\ & \leq \quad -b_i \end{cases}$$

$$\textstyle\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i \equiv \textstyle\sum_j (-a_{ij}) x_j \ \leq -b_i$$

$$\textstyle\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i \equiv \textstyle\sum_j a_{ij} x_j - s_i = b_i, \qquad s_i \geq 0$$

$$\textstyle\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \equiv \textstyle\sum_j a_{ij} x_j + s_i = b_i, \qquad s_i \geq 0$$

Le variabili s_i in sono dette *variabili di scarto*, perché forniscono la differenza tra la parte sinistra del vincolo e il termine noto.

---

(1) Considereremo nel seguito un vettore come una matrice riga o colonna, a seconda del contesto.

Inoltre una variabile x non vincolata in segno può essere sostituita da variabili non negative per mezzo della trasformazione:

$$x = x^+ - x^-,\ x^+ \geq 0,\ x^- \geq 0.$$

Nel seguito useremo spesso per definire problemi di *PL* una delle due seguenti forme:

$$\begin{array}{ll} \max\ cx & \\ \quad Ax \leq b & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \min cx \\ \ Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{array}$$

In alcuni testi la prima forma è detta *canonica* o *generale*, mentre la seconda è detta *standard*.

Esempio: Serramenti e Infissi (mix produttivo)

In una "fabbrichetta" della bassa pavese si producono due tipi di serramenti: una porta di alluminio e una finestra in legno. Tolte le spese di produzione e del personale, il guadagno di ogni porta è di 30 euro, mentre quello di ogni finestra è di 50. Una settimana i tre operai della fabbrichetta (un fabbro, un falegname e un assemblatore) si rendono disponibili alla titolare per effettuare delle ore di straordinario: rispettivamente 4, 12 e 18 ore. Per produrre una porta sono necessarie un'ora di lavoro del fabbro e 3 ore di lavoro dell'assemblatore, mentre una finestra richiede 2 ore di falegname e 2 di assemblatore. La titolare deve pianificare la produzione extra in modo da massimizzare il guadagno.
Le variabili decisionali sono x_P e x_F e rappresentano rispettivamente il numero di porte e di finestre da produrre. Se vogliamo usare una rappresentazione matriciale il vettore delle variabili è:

$$x = \begin{bmatrix} x_P \\ x_F \end{bmatrix},$$

Mentre il vettore dei coefficienti della funzione obiettivo c è

$$c = [30, 50].$$

In forma canonica il problema ha la seguente matrice dei coefficienti dei vincoli e vettore dei termini noti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si noti come siano stati messi esplicitamente i vincoli di segno delle variabili all'interno della matrice A ($-x_P \geq 0$, e $-x_F \geq 0$), poiché la forma canonica non prevede variabili vincolate in segno e gli eventuali vincoli di segno devono venire trattati come vincoli espliciti del problema.

Esempio: Classificatore lineare

Data una serie di m osservazioni effettuate (per esempio gli ungulati censiti in una data area di bosco) ciascuna caratterizzata da un insieme di n attributi (per esempio, peso, altezza, età stimata, numero di ramificazioni delle corna) e una classificazione in due classi (per esempio per sesso M/F), si vuole individuare un criterio per poter classificare ogni altra futura osservazione. Il problema può essere ricondotto alla programmazione lineare. I dati relativi alle osservazioni sono contenuti in una matrice A, dove l'elemento a_{ij} è l'attributo j della osservazione i. Si vuole trovare un modo per pesare i vari attributi e una cifra di merito che costituisca una soglia di separazione tra una classe e l'altra. Formalmente vogliamo trovare dei pesi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e una soglia y tali che:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq y \qquad \text{per ogni osservazione } i = 1,\ldots, m \text{ appartenente alla classe 1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j > y \qquad \text{per ogni osservazione } i = 1,\ldots, m \text{ appartenente alla classe 2.}$$

Si tratta di un insieme di m vincoli lineari in n+1 incognite. Una volta determinate le x e la y, potremo classificare una qualsiasi altra osservazione $*$ con attributi a_{*j} calcolando:

$$w = \sum_{j=1}^{n} a_{*j} x_j$$

e attribuendo l'osservazione $*$ alla prima classe se $w \leq y$ e alla seconda se $w > y$. In realtà osserviamo che il secondo gruppo di vincoli che abbiamo imposto per la determinazione delle x e della y coinvolgono delle disuguaglianze strette, cosa non prevista nella programmazione lineare, dove tutti i vincoli devono includere l'uguaglianza. Nel caso della classificazione lineare questo inconveniente può essere aggirato trasformando il secondo gruppo di vincoli nelle seguenti disuguaglianze:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq y + \varepsilon \qquad \text{per ogni osservazione } i = 1,\ldots, m \text{ appartenente alla classe 2}$$

dove ε è un valore fissato opportunamente piccolo.
Si noti come nel caso del classificatore lineare non abbiamo indicato alcuna funzione obiettivo, in quanto le varie soluzioni ammissibili (ammesso che ne esistano) sono per noi ammissibili.

Esercizio
Costruire un esempio di classificatore lineare per un insieme di alcune osservazioni con due attributi per cui non esistono soluzioni ammissibili.

Esercizio
Trasformare la formulazione del problema del classificatore lineare in forma standard. Individuare possibili funzioni obiettivo.

1.1 Rappresentazione geometrica

Quando abbiamo a che fare con problemi in forma canonica con due (o tre) variabili, possiamo ricorrere alla rappresentazione geometrica per ricavare una maggiore intuizione del problema e addirittura risolverlo. Riprendiamo in esame l'esempio dei Serramenti e Infissi. In fig. 1 è evidenziato col tratteggio la *regione ammissibile*, cioè l'insieme di tutti i punti che soddisfano i vincoli. Si tratta dell'intersezione dei cinque semispazi definiti dalle disuguaglianze dei vincoli; un insieme di questo tipo viene detto *poliedro* (*politopo* nel caso particolare in cui sia limitato, come nell'esempio che stiamo considerando). E' immediato verificare che, proprio perché si ottiene facendo l'intersezione di semispazi, tale insieme è *convesso*; si usa spesso il termine *poliedro convesso* per caratterizzare la geometria della regione ammissibile di un problema di Programmazione Lineare.
Un punto appartenente all'insieme ammissibile verrà chiamato *soluzione ammissibile*, mentre, con una certa improprietà di linguaggio, un punto esterno viene a volte indicato come soluzione non ammissibile.
Nella figura sono evidenziati i vincoli per mezzo delle rette luogo dei punti che li soddisfano come uguaglianze strette; tali rette costituiscono la frontiera dei semispazi definiti dai vincoli stessi. I vincoli di non negatività delle variabili, trattati come vincoli espliciti, hanno la frontiera individuata dagli assi

cartesiani. Nella figura abbiamo anche indicato i gradienti dei vincoli: i vettori rossi "appoggiati" alle rette relativi ai bordi dei vincoli. Dato che abbiamo a che fare con vincoli lineari, i gradienti dei vincoli non sono altro che le varie righe della matrice A. Il gradiente di un vincolo indica in quale direzione la funzione lineare a sinistra della disuguaglianza cresce. Poiché i vincoli del nostro problema sono di minore o uguale, la regione ammissibile si trova nel semispazio opposto al gradiente.
Le rette corrispondenti ai vincoli individuano nel poliedro delle *facce* e dei *vertici*: sono vertici ad esempio i punti (2, 6) e (4, 3), ed è una faccia il segmento che li unisce. Nel seguito definiremo in modo più formale i concetti di faccia e di vertice, e vedremo come i vertici possano essere considerati delle particolari facce.

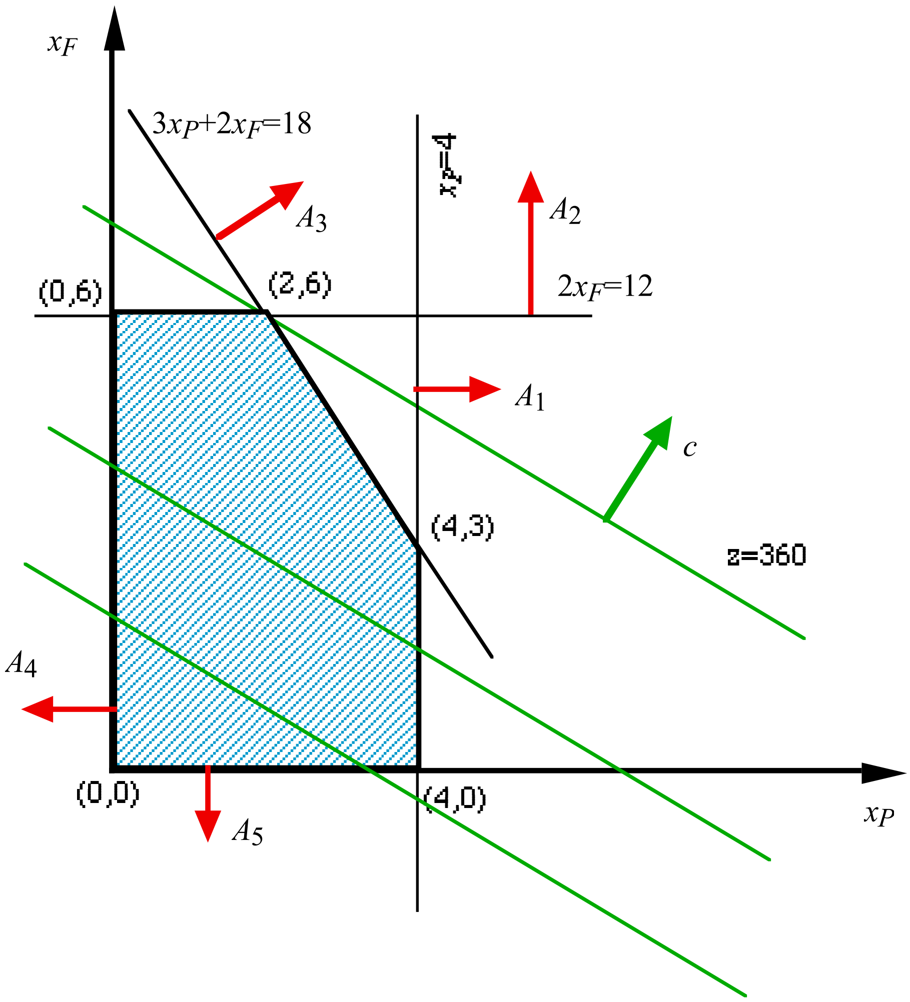

fig. 1: rappresentazione e soluzione grafica del problema degli infissi

Nella Programmazione Lineare i vertici e le facce giocano un ruolo particolarmente importante. È infatti possibile dimostrare che in un problema di *PL*, se la soluzione ottima esiste finita, allora almeno una soluzione ottima si troverà in un vertice; inoltre, se un punto interno a una faccia è soluzione ottima del problema, allora tutti i punti della faccia sono soluzioni ottime. La verità di queste proprietà viene suggerita da un esame della figura (verrà provata in modo formale nel seguito).
Proviamo ora a risolvere il problema. Consideriamo la retta $30_P+50x_F=z$. Per ciascun valore di z essa definisce l'insieme delle soluzioni (non necessariamente ammissibili) che hanno valore della funzione obiettivo uguale a z. In figura sono indicate tre di tali rette, corrispondenti ai valori 100, 200 e 360. Al crescere di z le rette vengono traslate muovendosi nella direzione definita dal vettore c=[30, 50], gradiente della funzione obiettivo (rappresentato, un po' ridotto, in verde nella figura).

Chiaramente, per ogni dato valore di z è possibile realizzare un profitto pari a quel valore se e solo se la corrispondente retta ha intersezione non vuota con la regione ammissibile; pertanto per trovare una soluzione ottima al nostro problema basta spostare la retta nella direzione del gradiente quanto più possibile con il vincolo che l'intersezione con la regione ammissibile si mantenga non vuota. Nel nostro caso, il massimo valore attribuibile a z è 360, e per tale valore l'intersezione tra la retta e l'insieme ammissibile si riduce ad un solo punto, il vertice (2, 6), che è pertanto la soluzione ottima.

Nel problema ora esaminato la regione ammissibile è limitata. Possiamo imbatterci in problemi in cui la regione ammissibile è, lungo alcune direzioni, non limitata. In questi casi, dipendentemente dalla particolare funzione obiettivo (cioè dalla direzione del suo gradiente), possono esistere direzioni lungo le quali è possibile spostarsi mantenendo l'ammissibilità e facendo crescere (in problemi di massimo) il valore della funzione obiettivo senza mai raggiungere un massimo. Ad esempio, nel problema della Serramenti e Infissi, se non ci fossero il secondo ed il terzo vincolo, potremmo fare crescere all'infinito il valore di z senza mai trovare un valore per cui la retta $30_P+50x_F=z$ abbia intersezione vuota con la regione ammissibile. In casi di questo tipo si parla di *problema illimitato*, cioè esistono soluzioni ammissibili, ma non esiste massimo per la funzione obiettivo (esiste solamente un estremo superiore, cioè $+\infty$). Nelle applicazioni pratiche, una situazione di questo tipo indica generalmente che il modello costruito rappresenta in modo scorretto o incompleto la realtà oggetto dello studio.

Un caso in un certo senso opposto è quello in cui alcuni dei vincoli sono tra loro incompatibili, per cui l'insieme ammissibile risulta vuoto; in questo caso non esistono soluzioni e si parla di *problema inammissibile*.

Esempio: trasformazione in forma standard e rappresentazione geometrica

Si consideri il problema di *PL* in forma canonica:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & 3x_1 - x_2 & & \\
 & x_1+x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1+x_2 & \leq & 5 \\
 & -x_2 & \leq & 2
\end{array}$$

Mediante le trasformazioni dei vincoli, in particolare introducendo delle variabili di scarto, il problema può essere trasformato nella forma standard equivalente:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & 3x_1 - x_2 & & \\
 & x_1 + x_2 + s_1 & = & 4 \\
 & -x_1 + x_2 + s_2 & = & 5 \\
 & -x_2 + s_3 & = & 2 \\
 & s_1, s_2, s_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

La fig. 2 fornisce la rappresentazione geometrica del problema. In particolare si osservi che le soluzioni ammissibili del problema appartengono al poligono tratteggiato (regione ammissibile). Le variabili di scarto sono associate ai vincoli e definiscono la retta di supporto del lato del poligono (s_i=0) e il semipiano ammissibile corrispondente al vincolo ($s_i \geq 0$). Nella figura è indicato il gradiente della funzione obiettivo e la curva di livello della funzione obiettivo, cioè l'insieme dei punti tali che $3x_1 - x_2 = z$, per un dato reale z. La soluzione ottima del problema è dato dal vertice v in figura cui corrispondono i valori: $x_1 = 6, x_2 = -2, s_1 = 0, s_2 = 13, s_3 = 0$.

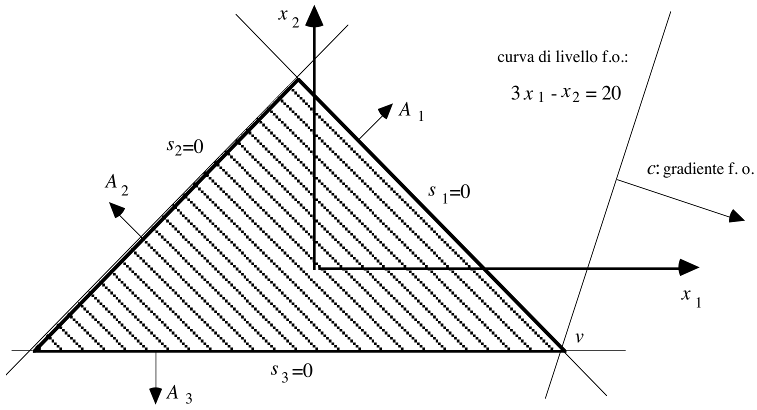

fig. 2: rappresentazione geometrica di un problema in forma standard

Esercizio
Costruire ulteriori esempi di *PL* nel piano. In particolare fornire problemi per cui risulti rispettivamente: regione ammissibile vuota, ottimo non finito (funzione obiettivo non superiormente limitata sull'insieme delle soluzioni ammissibili), soluzione ottima non uniche.

**1.2 Alcuni aspetti geometrici della Programmazione Lineare*

L'insieme delle soluzioni ammissibili di un problema di Programmazione Lineare è, dal punto di vista geometrico, l'intersezione di un certo numero di semispazi. In questo paragrafo richiameremo alcuni concetti geometrici che ci permetteranno di caratterizzare tali insiemi.

Definizione 1.1
Un insieme $S \subset \boldsymbol{R}^n$ è *convesso* se per ogni $x, y \in S$ e ogni $\lambda \in [0,1]$ la combinazione convessa $\lambda x + (1\text{-}x)y \in S$.

Geometricamente, l'unione di tutte le combinazioni convesse di due punti fornisce il segmento che li congiunge.

Definizione 1.2
L'insieme $C \subseteq \boldsymbol{R}^n$ è

- un *cono* se: $x \in C, \lambda \in \boldsymbol{R}_+ \Rightarrow \lambda x \in C$;
- un *cono convesso* se: $x, y \in C, \forall \lambda, \mu \geq 0 \Rightarrow (\lambda x + \mu y) \in C$;
- un *cono poliedrico* se: $C = \{x: Ax \leq 0\}$;
- un *cono finitamente generato* da $x^1, \ldots, x^m \in \boldsymbol{R}^n$ se:
$C = cono\{x^1, \ldots, x^m\} = \{x = \lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_m x^m: \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \boldsymbol{R}_+\}$.

Esercizio
Si dimostri che gli insiemi cono convesso, cono poliedrico e cono finitamente generato sono insiemi convessi.

Definizione 1.3
$P \subseteq \boldsymbol{R}^n$ è un *poliedro convesso* se:

$$P = \{x \in \boldsymbol{R}^n: A_i x \leq b_i, i = 1, \ldots, m\},$$

P è l'intersezione di un numero finito di *semispazi affini*.

Definizione 1.4
$Q \subseteq \boldsymbol{R}^n$ è un *politopo convesso* se esistono m vettori $v^1, \ldots, v^m$ tali che sia :

$$Q = conv\{v^1,\ldots,v^m\} = \{x = \lambda_1 v^1 + \ldots + \lambda_m v^m: \lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\},$$

Q è l'inviluppo convesso di $v^1,\ldots,v^m$.

Esercizio

Si dimostri che il poliedro convesso e il politopo convesso sono insiemi convessi.

Esercizio

Si dimostri che un cono poliedrico è un poliedro.

Come visto informalmente nel primo capitolo e nell'esempio dei serramenti e infissi risolto geometricamente, abbiamo intuito come i vertici del poliedro che racchiude la regione ammissibile sono importanti per limitare la ricerca delle soluzioni ammissibili. Pertanto è opportuno cercare di caratterizzarli formalmente.

Definizione 1.5

Sia $P \subseteq \boldsymbol{R}^n$ un poliedro convesso. Un vettore $x \in P$ è un *punto estremo* di P se non è possibile trovare due vettori y, $z \in P$, entrambi diversi da x, e uno scalare $\lambda \in [0,1]$, tale che $x=\lambda y+(1-\lambda)z$.

Definizione 1.6

Sia $P \subseteq \boldsymbol{R}^n$ un poliedro convesso. Un vettore $x \in P$ è un *vertice* di P se esiste un vettore $c \in \boldsymbol{R}^n$ tale che $cx > cy$, per ogni $y \in P$ e $y \neq x$.

Secondo questa ultima definizione x è un vertice se esiste un iperpiano (con gradiente c) che separa x dal resto della regione ammissibile, secondo quanto abbiamo visto nell'esempio del classificatore lineare. Oppure esiste una opportuna funzione obiettivo con gradiente c tale per cui x risulta essere la soluzione ottima unica del problema definito sul poliedro P. Sia la definizione 1.5 sia la 1.6 individuano quello che abbiamo informalmente chiamato "vertice" del poliedro. Purtroppo nessuna di queste due definizioni ci è utile dal punto di vista algoritmico.

Definizione 1.7

Consideriamo un poliedro $P=\{x \in \boldsymbol{R}^n: A_i x \leq b_i, i=1,\ldots,m\}$, e un punto $x^* \in \boldsymbol{R}^n$ definiamo $I(x^*)=\{i: A_i x^* \leq b_i\}$, l'insieme dei *vincoli attivi* in x^*.

Definizione 1.8

Sia $P=\{x \in \boldsymbol{R}^n: A_i x \leq b_i, i=1,\ldots,m\}$ un poliedro convesso. Un vettore x è una *soluzione di base* se tra i vettori A_i con $i \in I(x)$ ve ne sono n linearmente indipendenti. Abbiamo una soluzione di base ammissibile se $x \in P$.

Si noti che se $B \subseteq I(x)$ individua n vettori A_i linearmente indipendenti (quindi è una base) allora il sistema

$$A_i\, x = b_i \quad i \in B$$

ha una soluzione unica. Questo significa che l'intersezione degli iperpiani che costituiscono bordi dei vincoli in B individua un unico punto.

Teorema 1.1

Dato un poliedro $P=\{x\in\boldsymbol{R}^n\colon A_i x\leq b_i,\ i=1,\dots,m\}$, le definizioni 1.5, 1.6, e 1.8 sono equivalenti.

Dim

Dimostriamo le tre implicazioni.

a) x vertice $\Rightarrow$ x punto estremo

Sia x un vertice di P, quindi secondo la definizione 1.6 esiste $c\in\boldsymbol{R}^n$ tale che $cx>cy$, per ogni $y\in P$ e $y\neq x$. Consideriamo ora un paio di punti qualsiasi di P, y e z, diversi da x e un moltiplicatore $\lambda\in[0,1]$, allora applicando la definizione abbiamo $cx>cy$ e $cx>cz$, che implica $cx>c(\lambda y+(1-\lambda)z)$. Da questo segue che $x\neq\lambda y+(1-\lambda)z$ il che significa che x non può essere scritto come combinazione convessa di altri due punti di P diversi da x stesso, che corrisponde a dire che x è un punto estremo di P.

b) x punto estremo $\Rightarrow$ x soluzione di base ammissibile

Questa volta supponiamo che x non sia una soluzione di base e dimostriamo che x non è un punto estremo. Dato che x non è una soluzione di base significa che non esistono in $\{A_i,\ i\in I(x)\}$ n vettori linearmente indipendenti. Sia allora $d\in\boldsymbol{R}^n$ un vettore non tutto nullo ortogonale a ciascun vettore A_i ovvero tale che $A_i d=0$ per ogni $i\in I(x)$.

Costruiamo due punti y e z a partire da x: $y=x+\varepsilon d$ e $z=x-\varepsilon d$, dove ε è uno scalare opportunamente piccolo. Osserviamo che per l'ortogonalità di d, $A_i y=A_i z=A_i x=b_i$. questo significa che i vincoli attivi in x sono attivi anche in y e z. Poiché $x\in P$ abbiamo anche che $A_i x<b_i$ per $i\in\{1,\dots,m\}\backslash I(x)$, e per una scelta di ε opportuna anche $A_i y$ e $A_i z$ sono minori di b_i per $i\in\{1,\dots,m\}\backslash I(x)$, quindi anche y e $z\in P$. Ma possiamo anche notare che $x=(y+z)/2$, che implica che x non può essere un punto estremo.

c) Soluzione di base ammissibile $\Rightarrow$ vertice

Sia x una soluzione di base ammissibile. Costruiamo un vettore c come segue

$$c=\sum_{i\in I(x)} A_i.$$

Risulta:

$$cx=\sum_{i\in I(x)} A_i x=\sum_{i\in I(x)} b_i.$$

Inoltre per ogni $y\in P$ e ogni i abbiamo che ovviamente $A_i\leq b_i$ e

$$cy=\sum_{i\in I(x)} A_i y\leq\sum_{i\in I(x)} b_i. \tag{1.1}$$

Questo dimostra che x è una soluzione ottima per il problema di PL definito su P con c come gradiente della funzione obiettivo. Inoltre in (1.1) l'uguaglianza vale solo se $A_i y=b_i$ per ogni $i\in I(x)$. Poiché x è una soluzione di base, ci sono n vincoli linearmente indipendenti attivi in x, e x è la soluzione unica del sistema $A_i x=b_i$ per $i\in I(x)$. Pertanto se $y\neq x$, $cy<cx$, e x rispetta la definizione di vertice.

Per la transitività dell'implicazione abbiamo l'equivalenza delle tre definizioni. ♦

Definizione 1.8

Due basi B_1 e B_2 sono *adiacenti* se differiscono per una sola componente.

Esercizio

Si consideri il poliedro di figura 5 e la soluzione di base x indicata. Individuare le soluzioni di base adiacenti a x.

Il seguente teorema individua una proprietà fondamentale dei poliedri convessi e ci aiuta ad arrivare a una dimostrazione formale del perché in un problema di programmazione lineare, se esiste una soluzione ottima finita, questa corrisponde ad almeno un vertice.

Teorema 1.2 [Motzkin, 1936] *Decomposizione di poliedri*
$P \subseteq \mathbf{R}^n$ è un poliedro se e solo se $P = Q + C$ dove Q è un politopo e C è un cono poliedrico.

Sia $P = Q + C$, dove $Q = conv\{x^1,\ldots,x^s\}$ e $C = cono\{y^1,\ldots,y^t\}$; diremo che P è generato dai *punti* $x^1,\ldots,x^s$ e dalle *direzioni* $y^1,\ldots,y^t$.
Nel caso in cui $conv\{x^1,\ldots,x^s\}$ [$cono\{y^1,\ldots,y^t\}$] sia una rappresentazione minimale del politopo Q [del cono C], allora i vettori $x^1,\ldots,x^s$ [$y^1,\ldots,y^t$] saranno detti *punti estremi* o *vertici* di Q [*raggi estremi* di C].

Esempio
Si consideri l'esempio di decomposizione di poliedri in fig. 3 dove:

$P = Q + C,\ Q = conv\{x^1,x^2,x^3\}$ e $C = cono\{y^1,y^2\}$.

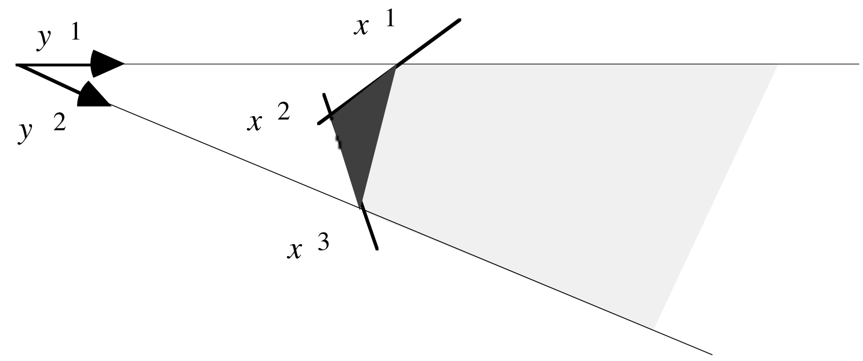

fig. 3

La decomposizione è minimale nel senso che i punti estremi x^1,x^2,x^3 [i raggi estremi y^1,y^2] sono il minimo numero di vettori per generare Q [C].

Teorema 1.3
Sia $P = \{x: Ax \le b\} = Q + C$, dove $Q = conv\{x^1,\ldots,x^s\}$ e $C = cono\{y^1,\ldots,y^t\}$. Se il problema:

$$\begin{aligned} \max\ & cx \\ & Ax \le b \end{aligned}$$

ha ottimo finito, allora esiste un $k \in \{1,\ldots,s\}$ tale che x^k è una soluzione ottima.

Dim.
Il problema $\max\{cx: Ax \le b\}$ è equivalente a:

$$\begin{aligned} \max\ & \sum_{i=1}^{s} \lambda_i c x^i + \sum_{j=1}^{t} \mu_j c y^j \\ & \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \\ & \lambda_i \ge 0, \qquad \mu_j \ge 0, \qquad i=1,\ldots,s,\ j=1,\ldots,t. \end{aligned}$$

Chiaramente il problema ha ottimo finito se e solo se $cy^j \leq 0, j=1,\ldots,t$, e nel caso che abbia ottimo finito esiste certamente una soluzione ottima in cui sia $\mu_j = 0, j=1,\ldots,t$. Quindi il problema può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{s} \lambda_i c x^i \\ & \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \qquad \text{equivalente a} \quad \max\{cx^i : i=1,\ldots,s\}, \\ & \lambda_i \geq 0, \quad i=1,\ldots,s, \end{aligned}$$

e ciò completa la dimostrazione. ♦

Introduciamo ora una proprietà degli insiemi convessi che risulterà essere particolarmente utile nel seguito.

Teorema 1.4 (dell'iperpiano separatore)

Sia S un insieme convesso chiuso di $\boldsymbol{R}^n$ e sia dato $c \notin S$ Allora esiste un vettore $x \in \boldsymbol{R}^n$ e $\varepsilon>0$ tale che

$$cx \geq zx + \varepsilon \qquad \forall z \in S.$$

Dim

Sia z_0 il punto di S più vicino a c. Dato che $c \notin S$ si ha $\|z_0 - c\| > 0$.

Dimostriamo che $(c - z_0)(z - z_0) \leq 0 \ \forall z \in S$ che geometricamente significa che spostandosi da z_0 verso z ci si allontana da c. Per farlo consideriamo una combinazione convessa di z e z_0: $\lambda z + (1-\lambda)z_0$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

$$\begin{aligned} \|c - z_0\|^2 & \leq \|c - \lambda z - (1-\lambda)z_0\|^2 \qquad \text{dato che } z_0 \text{ è il punto più vicino a } c, \\ & = \|(c - z_0) + \lambda(z_0 - z)\|^2 \\ & = \|c - z_0\|^2 + 2\lambda(c - z_0)(z_0 - z) + \lambda^2\|z_0 - z\|^2 \end{aligned}$$

Semplificando otteniamo:

$$2\lambda\,(c - z_0)\,(z_0 - z) + \lambda^2\|z_0 - z\|^2 \geq 0$$

dividendo per $\lambda > 0$ si ha:

$$2(c - z_0)\,(z_0 - z) + \lambda\|z_0 - z\|^2 \geq 0.$$

Se facciamo tendere λ a 0, abbiamo che:

$$(c - z_0)\,(z_0 - z) \geq 0.$$

Ora dimostriamo che $x = (c - z_0)$ è il gradiente dell'iperpiano separatore che cerchiamo.

$x \neq 0$ per costruzione, dimostriamo ora che x separa c da qualsiasi $z \in S$, cioè che $cx > zx$.

Per ogni $z \in S$ vale quanto segue:

$$\begin{aligned} 0 & \leq (c - z_0)\,(z_0 - z) \\ & = (c - z_0)\,(c - c + z_0 - z) \\ & = (c - z_0)\,(c - z) + (c - z_0)\,(z_0 - c) \\ & = \quad x \qquad (c - z) \ - \|c - z_0\|^2 \end{aligned}$$

quindi possiamo concludere che $cx \geq zx + \varepsilon$, dove $\varepsilon = \|c - z_0\|^2 > 0$. ♦

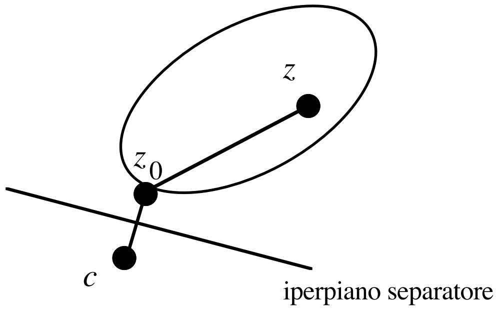

fig. 4: iperpiano separatore

Esempio: interpretazione geometrica del classificatore lineare
Richiamando l'esempio del classificatore lineare introdotto in precedenza, possiamo interpretarne geometricamente il significato. Le m osservazioni a disposizione possono venire viste come dei punti in $\boldsymbol{R}^n$. I coefficienti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e y costituiscono di fatto il gradiente e il termine noto di un iperpiano che separa i punti che appartengono alla prima classe da quelli appartenenti alla seconda. In fig. 5 abbiamo riportato un insieme di osservazioni rosse e blu, e l'iperpiano che le separa.

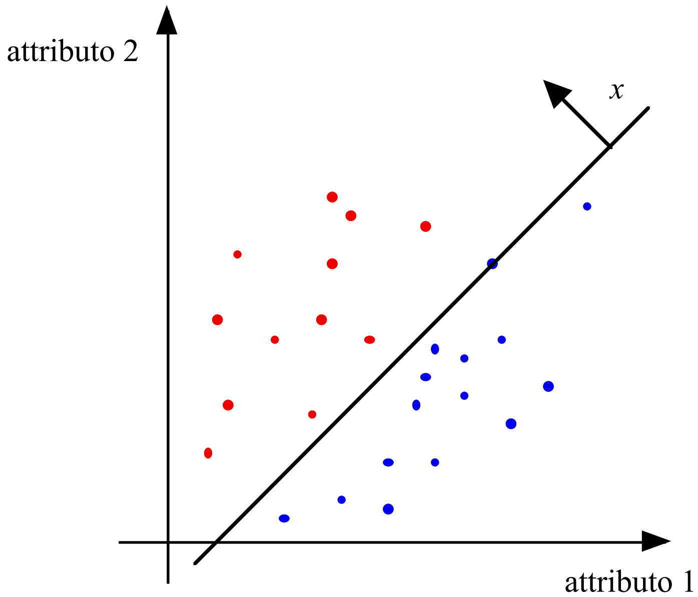

fig. 5: classificatore lineare, iperpiano separatore

2. Coppie di problemi duali

Come abbiamo fatto per i problemi su grafo (cammini minimi, flusso massimo, flusso di costo minimo), per fornire un algoritmo di soluzione abbiamo bisogno di caratterizzare la soluzione ottima. A ogni problema di programmazione lineare possiamo associare un altro problema, detto *duale*, che fornisce preziose informazioni relative alla soluzione. Cerchiamo di formulare il problema duale in un paio di casi abbastanza intuitivi per capirne le proprietà.

Esempio: Un problema di dieta
In un allevamento di polli si usano per il mangime due tipi di cereali, A e B. Il mangime deve soddisfare dei requisiti nutritivi: deve contenere almeno 8 unità di carboidrati, 15 unità di proteine e 3 unità di vitamine per unità di peso. Il contenuto unitario di carboidrati, proteine e vitamine in A e B, il

loro costo unitario (in centesimi) e il loro requisito minimo giornaliero sono riportati nella seguente tabella

	A	*B*	requisito min. giornaliero
carboidrati	2	2	11
proteine	4	2	20
vitamine	1	3	9
costo unitario	12	16	

Siano x_1 e x_2 il numero di unità di cereale *A* e, rispettivamente, *B* impiegate nel mangime. Il numero di unità di carboidrati presenti nel mangime è dato da: $2x_1+ 2x_2$. Poiché il fabbisogno minimo di carboidrati è di 11 unità deve risultare: $2x_1+2x_2\geq 11$. Analogamente per le unità di proteine deve risultare $4x_1+2x_2\geq 20$ e per le unità di vitamine $x_1+3x_2\geq 9$. Ai tre vincoli precedenti si devono aggiungere le ovvie condizioni di non negatività delle variabili di decisione $x_1, x_2\geq 0$. Infine il costo della decisione (x_1, x_2) è dato da: $12x_1+16x_2$. La dieta di costo minimo è data dunque da una soluzione del seguente problema di *PL*:

$$\begin{array}{lrcrcr}
\min & 12x_1 & + & 16x_2 & & \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & \geq & 11 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \geq & 20 \\
 & x_1 & + & 3x_2 & \geq & 9 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Si osservi come al problema in esame sia naturalmente associato un altro problema che chiameremo *il problema del venditore di pillole per polli*.

Si tratta di stabilire i prezzi di vendita di pillole rispettivamente di carboidrati, proteine e vitamine in modo che il ricavato della vendita sia massimo e che i prezzi siano competitivi. In altre parole l'allevatore di polli deve ritenere non svantaggioso acquistare le pillole invece dei cereali *A* e *B*. Supponiamo che ciascuna pillola contenga una unità del corrispondente elemento nutritivo.

Siano y_1, y_2 e y_3 i prezzi di vendita unitari rispettivamente delle pillole di carboidrati, di proteine e di vitamine. Poiché l'allevatore deve percepire la dieta a base di pillole non più costosa della dieta a base di cereali dovrà risultare: $2y_1+4y_2+y_3\leq 12$ e cioè il costo delle pillole necessarie a fare l'equivalente (da un punto di vista nutritivo) di una razione del cereale *A* deve essere non superiore a 12 centesimi. Analogamente per il cereale *B*: $2y_1+2y_2+3y_3\leq 16$. I prezzi di vendita devono essere non negativi e il ricavato della vendita è dato $11y_1+20y_2+9y_3$ (si osservi infatti che 11, 20 e 9 sono il minimo numero di pillole di carboidrati, proteine e vitamine necessari alla corretta alimentazione di un pollo). Il problema del venditore di pillole per polli è dunque:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 11y_1 & + & 20y_2 & + & 9y_3 & & \\
 & 2y_1 & + & 4y_2 & + & y_3 & \leq & 12 \\
 & 2y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & \leq & 16 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0
\end{array}$$

I due problemi sono riassunti nella fig. 6 che mette in evidenza le relazioni tra variabili di un problema e vincoli dell'altro e tra termini noti e funzione obiettivo.

$$
\begin{array}{c|cc|c|c|}
 & x_1 & x_2 & & \text{max} \\
y_1 & 2 & 2 & & 11 \\
y_2 & 4 & 2 & \geq & 20 \\
y_3 & 1 & 3 & & 9 \\
 & \geq & & & \\
\text{min} & 12 & 16 & &
\end{array}
$$

fig. 6

Esercizio
Con il linguaggio di modellazione presentato formulare i due problemi (si noti come il file di dati è comune ai due problemi). Confrontare i valori delle soluzioni ottime. Evidenziare le relazioni tra la soluzione di un problema e lo scarto dei vincoli dell'altro problema. Provare a variare di una unità uno dei coefficienti del vettore dei termini noti a turno e verificare di quanto varia il valore della soluzione ottima.

Esempio: Un problema di trasporto

Una industria chimica produce un CVM in n fabbriche e lo immagazzina per la vendita in m depositi. Siano:

- a_i la quantità di CVM prodotta dalla fabbrica i (i=1,…,n);
- d_j la capacità del deposito j (j=1,…,m) e assumiamo che $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} d_j$ cioè che la produzione totale eguagli la capacità totale dei depositi;
- b_{ij} il costo di trasporto da i a j, per unità di prodotto.

Si vuole trasportare il CVM prodotto dalle fabbriche ai depositi in modo da minimizzare il costo di trasporto.
Indichiamo con x_{ij} le variabili decisionali che danno la quantità di CVM trasportata da i a j. I vincoli, oltre alle ovvie condizioni di non negatività delle variabili di decisione $y_{ij} \geq 0$, impongono che dalla fabbrica i venga trasportato tutto il CVM prodotto e cioè: $\sum_{j=1}^{m} y_{ij} = a_i$; il CVM trasportato al deposito j saturi la sua capacità e cioè: $\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = b_j$. Il costo complessivo di trasporto relativo a una soluzione y_{ij}, i=1,…,n, j=1,…,m, è $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} y_{ij}$. Il problema può essere visto anche come un particolare problema di flusso in cui la rete è definita da tanti nodi quanti sono le fabbriche e i depositi, ed esistono gli archi che vanno da ogni fabbrica a ogni deposito a cui è associato il costo b_{ij}. Un nodo corrispondente a una fabbrica i ha associata una offerta di flusso -a_i, e un nodo associato a un deposito j ha associato una domanda di flusso pari a d_j. Quindi il problema formulato come segue:

$$
\begin{array}{llll}
\min & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} y_{ij} & & \\
 & -\sum_{j=1}^{m} y_{ij} = -a_i & & i=1,\dots,n, \\
 & \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = d_j & & j=1,\dots,m, \\
 & y_{ij} \geq 0 & & i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m.
\end{array}
$$

Anche in questo caso si può associare un altro problema ai dati del problema di trasporto che può essere interpretato come una sorta di "outsourcing" del processo di trasporto. Una ditta di trasporti si offre di comprare il CVM presso la fabbrica i al prezzo unitario λ_i rivendendolo al deposito j al prezzo unitario μ_j. I prezzi di acquisto e di vendita diventano le variabili decisionali del problema della ditta di trasporto. La ditta vuole massimizzare il guadagno dell'operazione che è dato da $-\sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i + \sum_{j=1}^{m} d_j\mu_j$.

Ovviamente i prezzi di acquisto e vendita dovranno essere competitivi rispetto al costo di trasporto dell'industria. In base all'offerta della ditta di trasporto, l'industria pagherebbe il trasporto di una unità di CVM da i a j $(-\lambda_i + \mu_j)$. Pertanto dovrà risultare $-\lambda_i + \mu_j \le b_{ij}$. Il problema della ditta di trasporto può quindi essere formulato come il seguente problema di *PL*:

$$
\begin{array}{lllll}
\max & -\sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i & + \sum_{j=1}^{m} d_j\mu_j & & \\
 & -\lambda_i & + \mu_j & \le b_{ij} & i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m.
\end{array}
$$

Le relazioni fra i due problemi, nel caso di due industrie e tre depositi, sono illustrate nella fig. 7.

$$
\begin{array}{c|cccccc|c|c|}
 & y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{21} & y_{22} & y_{23} & & \max \\
\lambda_1 & -1 & -1 & -1 & & & & & -a_1 \\
\lambda_2 & & & & -1 & -1 & -1 & & -a_2 \\
 & & & & & & & = & \\
\mu_1 & 1 & & & 1 & & & & d_1 \\
\mu_2 & & 1 & & & 1 & & & d_2 \\
\mu_3 & & & 1 & & & 1 & & d_3 \\
 & & & & \wedge\!\backslash & & & & \\
\min & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & &
\end{array}
$$

fig. 7

Si noti che la matrice illustrata in figura non è altro che la matrice di incidenza nodi-archi del grafo relativo al problema.

Esercizio

Si consideri il problema della fabbrica di serramenti discusso in precedenza. Formulare il problema di una agenzia di lavoro interinale che vuole prendere in affitto i lavoratori dall'imprenditrice dei serramenti. Mettere in evidenza le relazioni tra variabili di un problema e vincoli dell'altro.

Negli esempi di problemi appena descritti, si è visto come, in modo naturale, al problema di *PL* esaminato è associabile un nuovo problema avente con esso una stretta relazione. Il problema dell'allevatore di polli che deve miscelare i mangimi in forma matriciale è:

$$
(2.1) \qquad P: \qquad \begin{array}{l} \min cx \\ Ax \ge b \\ x \ge 0 \end{array}
$$

dove i vettori c e b sono i costi dei mangimi e il fabbisogno minimo per ogni elemento nutritivo, mentre la matrice A fornisce l'apporto nutritivo di ciascun mangime, elemento per elemento. Il problema ad esso associato del venditore di pillole, sempre in forma matriciale, è:

$$
(2.2) \qquad D: \qquad \begin{array}{l} \max yb \\ yA \le c \\ y \ge 0. \end{array}
$$

Questa relazione non vale solo per l'esempio specifico della dieta, ma per qualsiasi problema di *PL*. I problemi P e D costituiscono una *coppia di problemi duali*, in questo caso vengono anche detti *coppia simmetrica* poiché in entrambi i problemi i vincoli sono di disuguaglianza e in entrambi i problemi le variabili sono vincolate in segno. P viene chiamato il *primale* e D il *duale*, anche se il loro ruolo è del tutto intercambiabile, come evidenziato dal seguente teorema.

Teorema 2.1

Il duale del duale è il primale.

Dim.

Il problema D : max$\{yb$: $yA \leq c$, $y \geq 0\}$ può essere scritto equivalentemente [1] utilizzando le regole di trasformazione riassunte all'inizio del capitolo come min$\{-yb$: $-yA \geq -c$, $y \geq 0\}$.

Il duale di questo problema (cfr. (2.1) e (2.2)) è max$\{-cx$: $-Ax \leq -b$, $x \geq 0\}$, che è equivalente al problema P. ♦

Proviamo ora a considerare l'esempio dell'altra coppia di problemi duali relativi al problema del trasporto del CVM. Il problema del proprietario delle fabbriche che consiste nel minimizzare il costo di trasporto può essere visto in forma matriciale come

$$(2.3) \qquad \begin{array}{ll} \min & yb \\ & yA = c \\ & y \geq 0. \end{array}$$

dove A è la matrice di incidenza nodi archi del grafo bipartito completo tra le fabbriche e i depositi e il vettore dei coefficienti c_i corrisponde all'offerta di CVM con il segno negativo se l'indice i si riferisce a una fabbrica, e alla richiesta di CVM se viceversa si riferisce a un deposito.

Il problema del trasportatore in forma matriciale è:

$$(2.4) \qquad \begin{array}{ll} \max & cx \\ & Ax \leq b \end{array}$$

dove il vettore delle variabili x è ottenuto giustapponendo i due vettori λ e μ, cioè $x=[\lambda_i,\mu_i]$.

Abbiamo quindi la seguente *coppia asimmetrica*, detta così poiché in un problema abbiamo variabili non vincolate in segno e vincoli di disuguaglianza, mentre nell'altro abbiamo vincoli di uguaglianza e variabili vincolate in segno:

$$P: \begin{array}{ll} \max & cx \\ & Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad D: \begin{array}{ll} \min & yb \\ & yA = c \\ & y \geq 0. \end{array}$$

In realtà coppia simmetrica e coppia asimmetrica sono equivalenti. Infatti P può essere scritto equivalentemente come max$\{c(x^+ - x^-)$: $A(x^+ - x^-) \leq b$, $x^+, x^- \geq 0\}$ e, applicando la definizione di coppia simmetrica, si ottiene il duale: min$\{yb$: $yA \geq c$, $-yA \geq -c$, $y \geq 0\}$, che è equivalente al problema D della coppia asimmetrica.

Esercizio

Si dimostri il viceversa, cioè si dimostri che partendo dalla definizione di coppia asimmetrica si ottiene la definizione di coppia simmetrica.

Esercizio

Dimostrare il teorema 2.1 per la coppia asimmetrica.

Dato un problema di *PL* in qualsiasi forma possiamo sempre ricavarne il suo duale riconducendoci a una delle quattro forme viste tramite le trasformazioni equivalenti viste all'inizio del capitolo e ottenendo il duale corrispondente in maniera "automatica".

<u>Esempio: passaggio al duale (1)</u>

Si consideri il seguente problema di *PL*:

---

[1] L'equivalenza fra i due problemi è a meno del segno del valore della funzione obiettivo; problemi equivalenti hanno la stessa regione ammissibile e lo stesso insieme di soluzioni ottime. La stessa osservazione si applica anche alla successiva equivalenza nella dimostrazione.

$$
\begin{array}{llcr}
\min & 3x_1 - 4x_2 \qquad + x_4 & & \\
& 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \quad - x_4 & \geq & -3 \\
& -x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\
& x_2 \geq 0,\ x_4 \leq 0 & &
\end{array}
$$

Scegliamo come modello ad esempio il problema P della coppia asimmetrica. Dobbiamo quindi trasformare la funzione obiettivo in massimo, tutti i vincoli in minori o uguali, e rendere espliciti i vincoli di segno. Il problema equivalente è:

$$
\begin{array}{llcr}
-\max & -3x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 & & \\
& -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 & \leq & 3 \\
& -x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 3 \\
& x_1 - x_2 - x_3 & \leq & -3 \\
& -x_2 & \leq & 0 \\
& x_4 & \leq & 0
\end{array}
$$

Per scrivere il duale introduciamo 5 variabili $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ in corrispondenza ai 5 vincoli del primale, e scriviamo il duale rispettando lo schema della coppia asimmetrica:

$$
\begin{array}{llcr}
\min & 3y_1 + 3y_2 - 3y_3 & & \\
& -2y_1 - y_2 + y_3 & = & -3 \\
& 2y_1 + y_2 - y_3 - y_4 & = & 4 \\
& -4y_1 + y_2 - y_3 & = & 0 \\
& y_1 + y_5 & = & 1 \\
& y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 & &
\end{array}
$$

In alternativa, e in modo molto più rapido dato che non si richiedono trasformazioni intermedie, il duale di un qualunque problema di *PL* può essere scritto applicando le corrispondenze *P-D* indicate nella tabella di fig. 8, dove A_i indica la i-esima riga della matrice A e A^i indica la i-esima colonna.

min	max
variabili	vincoli
vincoli	variabili
vettore costi c	vettore termini noti b
vettore termini noti b	vettore costi c
$A_i x \geq b_i$	$y_i \geq 0$
$A_i x \leq b_i$	$y_i \leq 0$
$A_i x = b_i$	$y_i \gtrless 0$
$x_i \geq 0$	$yA^i \leq c_i$
$x_i \leq 0$	$yA^i \geq c_i$
$x_i \gtrless 0$	$yA^i = c_i$

fig. 8: tabella di corrispondenza Primale/Duale

<u>Esempio: passaggio al duale (2)</u>

Proviamo ad applicare la tabella di corrispondenza direttamente al problema dell'esempio precedente. Considerando i vincoli su x_2 e x_4 come vincoli di segno (quindi impliciti) dobbiamo introdurre due sole variabili duali (y_1, y_2) in corrispondenza ai vincoli del problema primale. Il duale avrà 4 vincoli:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & -3y_1 & +3y_2 & & \\
 & 2y_1 & -y_2 & = & 3 \\
 & -2y_1 & +y_2 & \leq & 4 \\
 & 4y_1 & +y_2 & = & 0 \\
 & -y_1 & & \geq & 1 \\
 & \multicolumn{4}{l}{y_1 \geq 0,\ y_2 \gtrless 0}
\end{array}
$$

Per capire il tipo di vincolo (≤,≥ o =) dobbiamo fare riferimento alla variabile primale corrispondente: x_1 e x_3 sono libere in segno (prima colonna corrispondente al problema di minimo, e ultima riga della tabella in fig. 8) quindi i corrispondenti vincoli del duale sono di uguaglianza. Il secondo vincolo è di minore o uguale poiché x_2 assume valori non negativi e viceversa il quarto vincolo è di maggiore o uguale. Considerazioni analoghe riguardano i segni delle variabili duali per i quali dobbiamo fare riferimento al tipo di vincoli del primale.
Il problema duale ottenuto dalla applicazione della tabella è diverso dal duale che avevamo ottenuto riconducendoci ad uno degli schemi di coppie di problemi duali. Possiamo però provare facilmente che i due duali sono equivalenti, applicando le regole di trasformazione viste all'inizio del capitolo. In particolare sdoppiando la variabile non vincolata in segno, introducendo opportune variabili di scarto e cambiando il verso della funzione obiettivo.

<u>Esempio</u>
Consideriamo il seguente problema di *PL* (dove sottintendiamo che se non esplicitamente segnalato, una variabile è non vincolata in segno, come ad esempio la variabile x_2).

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 12x_1 + & 7\ x_2 & & \\
 & 5x_1 + & 7\ x_2 & = & 8 \\
 & 4x_1 + & 2\ x_2 & \geq & 15 \\
 & 2x_1 + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & & \geq & 0
\end{array}
$$

Poiché il problema è di massimo, prendiamo come riferimento la seconda colonna della tabella di fig. 8. Trattando l'ultimo vincolo come un vincolo (implicito) di segno, il duale ha tre variabili e due vincoli e risulta essere:

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & 8\,y_1 & + & 15\ y_2 & + & 3\ y_3 & & \\
 & 5\,y_1 & + & 4\ y_2 & + & 2\ y_3 & \geq & 12 \\
 & 7\,y_1 & + & 2\ y_2 & + & y_3 & = & 7 \\
 & \multicolumn{7}{l}{y_2 \leq 0, y_3 \geq 0}
\end{array}
$$

Come si intuisce dagli esempi del paragrafo precedente, e in base anche ai risultati numerici ottenuti nella soluzione del problema della dieta, i problemi *P* e *D* non sono solo legati da relazioni di tipo "sintattico". Il seguente teorema fornisce una prima relazione tra i valori delle funzioni obiettivo dei due problemi. Qui, come nel seguito, salvo indicazione contraria, useremo la forma asimmetrica della dualità, ma naturalmente i risultati ottenuti sono indipendenti dalla particolare forma usata.

Teorema 2.2 (*Teorema debole della dualità*)
Se P e D ammettono soluzioni ammissibili, rispettivamente $\bar{x}$ *e* $\bar{y}$*, allora* $c\bar{x} \leq \bar{y}b$.

Dim.
Siano $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni ammissibili per *P* e *D* rispettivamente. Si ha:

$$\bar{y}A = c \quad \Rightarrow \quad c\bar{x} = \bar{y}A\bar{x},$$
$$A\bar{x} \le b,\ \bar{y} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{y}A\bar{x} \le \bar{y}b.$$

Quindi $c\bar{x} \le \bar{y}b$. ♦

In generale, se P e D sono non vuoti, si può affermare che:

$$\max\{cx\colon Ax \le b\} \le \min\{yb\colon yA=c,\ y \ge 0\}.$$

Il teorema debole della dualità è già uno strumento molto utile per riconoscere una soluzione ottima. Se infatti ci vengono fornite una soluzione ammissibile per il primale e una ammissibile per il duale che hanno stesso valore, nelle rispettive funzioni obiettivo, possiamo essere certi che nessuna delle due può venire migliorata. Questa considerazione intuitiva viene formalizzata nel seguente corollario.

Corollario 2.3
Se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ammissibili per P e D rispettivamente e $c\bar{x}=\bar{y}b$, allora $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime.

Dim.
Per ogni soluzione x ammissibile per P e per ogni soluzione y ammissibile per D risulta:

$cx = \bar{y}Ax \le \bar{y}b = c\bar{x}$ e quindi $\bar{x}$ è ottima per P;

$yb \ge yA\bar{x} = c\bar{x} = \bar{y}b$ e quindi $\bar{y}$ è ottima per D. ♦

Corollario 2.4
Se P ha ottimo non limitato, allora D è vuoto.

Infatti se D contenesse anche una sola soluzione, il suo valore costituirebbe un limite per il valore delle soluzioni di P.

<u>Esempio: Serramenti e infissi</u>
Ritorniamo al problema della Serramenti e Infissi. Abbiamo già dimostrato geometricamente come il vertice x=(2,6) sia la soluzione ottima, con valore 360 della funzione obiettivo; possiamo ora fornire una prova formale della ottimalità di (2, 6), utilizzando le conseguenze del teorema debole della dualità. Il duale del problema, in forma asimmetrica, è:

$$\begin{array}{lllllll}
\min & 4y_1 & + 12y_2 & + 18y_3 & & & \\
 & y_1 & + & 3y_3 & - y_4 & & = 30 \\
 & & 2y_2 & + 2y_3 & - & y_5 & = 50 \\
 & \multicolumn{6}{l}{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0.}
\end{array}$$

Consideriamo la soluzione y=(0,15,10,0,0) (più avanti vedremo come ottenerla). È immediato verificare che tale soluzione è ammissibile e il suo valore è dato da: 12·15 + 180·10 = 360. Il teorema debole della dualità e il corollario 2.3 ci permettono di affermare che la soluzione x=(2,6) è ottima, così come la y.

Esercizio
Si dimostrino le relazioni *P-D* di fig. 8 a partire dalla definizione di coppia simmetrica e, rispettivamente, di coppia asimmetrica.

*2.1 *Interpretazione geometrica del problema duale*

Si consideri la coppia asimmetrica:

$$P: \begin{array}{l} \max\ cx \\ \quad Ax \le b \end{array} \qquad\qquad D: \begin{array}{l} \min\ yb \\ \quad yA = c \\ \quad y \ \ \ge 0. \end{array}$$

Come abbiamo già avuto modo di vedere la regione ammissibile di P è un poliedro convesso ottenuto facendo l'intersezione degli semispazi definiti dai vincoli di uguaglianza. Anche la regione ammissibile di D può venire interpretata facilmente da un punto di vista geometrico, anche se bisogna cambiare punto di vista. Scrivendo per esteso i vincoli di D abbiamo:

$$y_1A_1 + y_2A_2 + \dots + y_mA_m = c$$

In pratica questi vincoli dicono che si vuole trovare una combinazione lineare dei gradienti dei vincoli di P $(A_1, A_2, \dots , A_m)$ utilizzando come moltiplicatori $y_1, y_2, \dots , y_m$. I moltiplicatori devono essere non negativi e tra tutte le soluzioni vogliamo quella che minimizza la somma pesata dei moltiplicatori con coefficienti $b_1, b_2, \dots , b_m$.

Esempio

Si consideri la coppia di problemi duali:

$$P: \begin{array}{rrrrrrr} \max & 3x_1 & - & x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \le & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \le & 5 \\ & & - & x_2 & \le & 2 \end{array} \qquad D: \begin{array}{rrrrrrrrr} \min & 4y_1 & + & 5y_2 & + & 2y_3 & & \\ & y_1 & - & y_2 & & & = & 3 \\ & y_1 & + & y_2 & - & y_3 & = & -1 \\ & & & y_1, & y_2, & y_3 & \ge & 0 \end{array}$$

In fig. 9 la coppia è presentata in forma tabellare, mentre in fig. 10 è data la rappresentazione geometrica di P.

$$\begin{array}{c|cc|c|c|} & x_1 & x_2 & & \min \\ \hline y_1 & 1 & 1 & & 4 \\ y_2 & -1 & 1 & \le & 5 \\ y_3 & 0 & -1 & & 2 \\ \hline & \multicolumn{2}{c}{=} & & \\ \max & 3 & -1 & & \end{array}$$

fig. 9

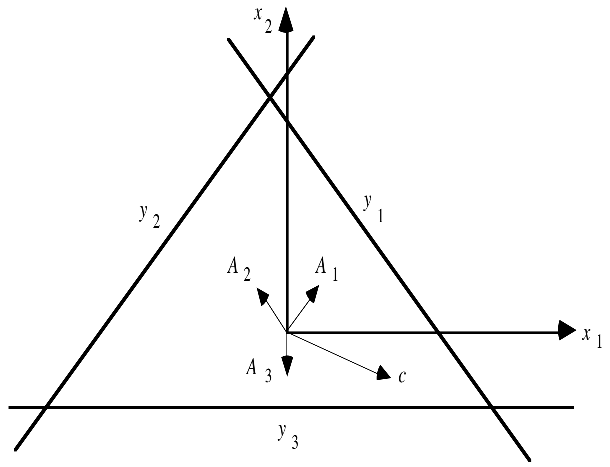

fig. 10

Dovendo esprimere il vettore c come combinazione lineare non negativa delle righe A_1, A_2 e A_3, risulta evidente che tale combinazione deve utilizzare A_1 e A_3, infatti c appartiene al cono generato da A_1 e A_3. Si noti anche come la soluzione ottima di P cade nel vertice in basso a destra del triangolo che rappresenta la regione ammissibile e che in tale vertice i vincoli attivi sono proprio A_1 e A_3.

3 Soluzione di un problema di programmazione lineare

In questo paragrafo affrontiamo la soluzione di un problema di programmazione lineare. La trattazione sarà alquanto informale e orientata alla descrizione di un semplice algoritmo. Dopo aver introdotto l'idea dell'algoritmo cercheremo di entrare più nel dettaglio evidenziando gli aspetti più formali facendo anche ricorso ad una interpretazione geometrica.

3.1 Direzioni ammissibili di crescita

Poniamoci nell'ottica di voler risolvere un problema di *PL* nella forma:

$$P: \begin{array}{l} \max\ cx \\ \quad Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad D: \begin{array}{l} \min\ yb \\ \quad yA = c \\ \quad y \geq 0. \end{array}$$

Sia $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ una soluzione ammissibile per P; ci chiediamo se tale soluzione è ottima o se è possibile migliorarla. Sfruttando il fatto che la regione ammissibile del problema è un insieme convesso, in particolare un poliedro, possiamo affermare che se esiste un punto x' migliore di $\bar{x}$, questo deve essere esprimibile nella forma:

$$(3.1) \qquad x' = \bar{x} + \lambda\xi$$

dove $\lambda>0$ è uno scalare detto *passo di spostamento*, e ξ è un vettore di $\mathbf{R}^n$ detto *direzione di spostamento*. Possiamo quindi dire che $\bar{x}$ è migliorabile se e solo se esiste una direzione ξ per cui, per una scelta opportuna del passo di spostamento $\lambda>0$, il punto $x' = \bar{x} + \lambda\xi$ cade ancora all'interno della regione ammissibile e ha valore di funzione obiettivo $cx'>cx$. Oppure, in altri termini, $\bar{x}$ è ottima se e solo se non esiste una tale direzione ξ. Definiamo formalmente questa caratteristica:

Definizione 3.1

Considerato un problema P: {max cx: $Ax \leq b$, $x \in \mathbf{R}^n$} e un punto $\bar{x}$ ammissibile. Si dice che $\xi \in \mathbf{R}^n$ è una *direzione di crescita ammissibile* se esiste uno scalare $\lambda>0$ tale che:

i) $c(\bar{x} + \lambda\xi) > c\bar{x}$
ii) $\bar{x} + \lambda\xi$ è ammissibile.

Concentriamoci nella ricerca di una direzione di crescita ammissibile ξ per il punto $\bar{x}$. Imponendo la condizione i) della definizione 3.1 e ricordando che $\lambda>0$, otteniamo:

$$c(\bar{x} + \lambda\xi) > c\bar{x} \Rightarrow c\bar{x} + \lambda c\xi > c\bar{x} \Rightarrow c\xi > 0$$

Lo sviluppo della condizione ii) richiede delle distinzioni. Infatti se il punto $\bar{x}$ non fosse aderente ad alcun vincolo del poliedro (quindi $A\bar{x}<b$) è evidente che potremmo spostarci in qualsiasi direzione, per un passo di spostamento $\lambda>0$ opportuno, senza rischiare di uscire dalla regione ammissibile. Se invece $\bar{x}$ toccasse qualche vincolo (quindi se l'insieme degli indici dei vincoli attivi $I(\bar{x})\neq\emptyset$) anche uno spostamento infinitesimo in direzione di uno dei gradienti dei vincoli ai quali siamo aderenti, sarebbe sufficiente per portarci fuori dalla regione ammissibile. Le condizioni di ammissibilità per la scelta di ξ quindi sono:

$$A_I x' = A_I(\bar{x}+ \lambda\xi) \leq b_I$$

dove A_I e b_I indicano rispettivamente la sottomatirce di A e il sottovettore di b relativi ai vincoli attivi $I(\bar{x})$. Sviluppando il prodotto e ricordando la definizione di vincoli attivi che vuole appunto che $A_i\bar{x} = b_i$ per $i\in I(\bar{x})$, abbiamo:

$$A_I(\bar{x}+ \lambda\xi) \leq b_I \Rightarrow A_I\bar{x}+ \lambda A_I\xi \leq b_I \Rightarrow A_I\xi \leq 0.$$

Riassumendo quanto visto fino ad ora possiamo dire che le condizioni di ottimalità per P nel punto $\bar{x}$ sono la **non** esistenza di una soluzione per il seguente sistema.

$$\text{(3.2)} \qquad \begin{array}{l} c\xi>0 \\ A_I\xi \leq 0 \end{array}$$

Se dovesse esistere una tale direzione ξ, potremmo spostarci di un passo $\lambda>0$. Spostandoci lungo ξ dobbiamo prestare attenzione a non uscire dalla regione ammissibile, e in particolare dobbiamo tenere sotto controllo i vincoli ai quali $\bar{x}$ non è aderente ovvero i vincoli con indici $\bar{I}(\bar{x})=\{1,\ldots,m\}\setminus I(\bar{x})$, detti vincoli non attivi. In particolare dobbiamo scegliere λ in modo tale che per tali vincoli sia:

$$A_i(\bar{x}+ \lambda\xi) \leq b_i \qquad \forall i\in\bar{I}(\bar{x})$$

quindi

$$A_i\bar{x}+ \lambda A_i\xi \leq b_i \qquad \forall i\in\bar{I}(\bar{x})$$

Pertanto per quegli indici i per cui $A_i\xi \leq 0$ i vincoli verranno sempre rispettati mentre per quelli per cui $A_i\xi > 0$ λ deve essere scelto in modo che:

$$\lambda \leq \frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_i\xi} \qquad \forall i\in\bar{I}(\bar{x}), A_i\xi > 0 .$$

<u>Esempio: serramenti e infissi</u>

Consideriamo nuovamente l'esempio della fabbrica di serramenti e analizziamo il problema della determinazione di una direzione di crescita ammissibile per i 4 punti indicati in fig. 11.

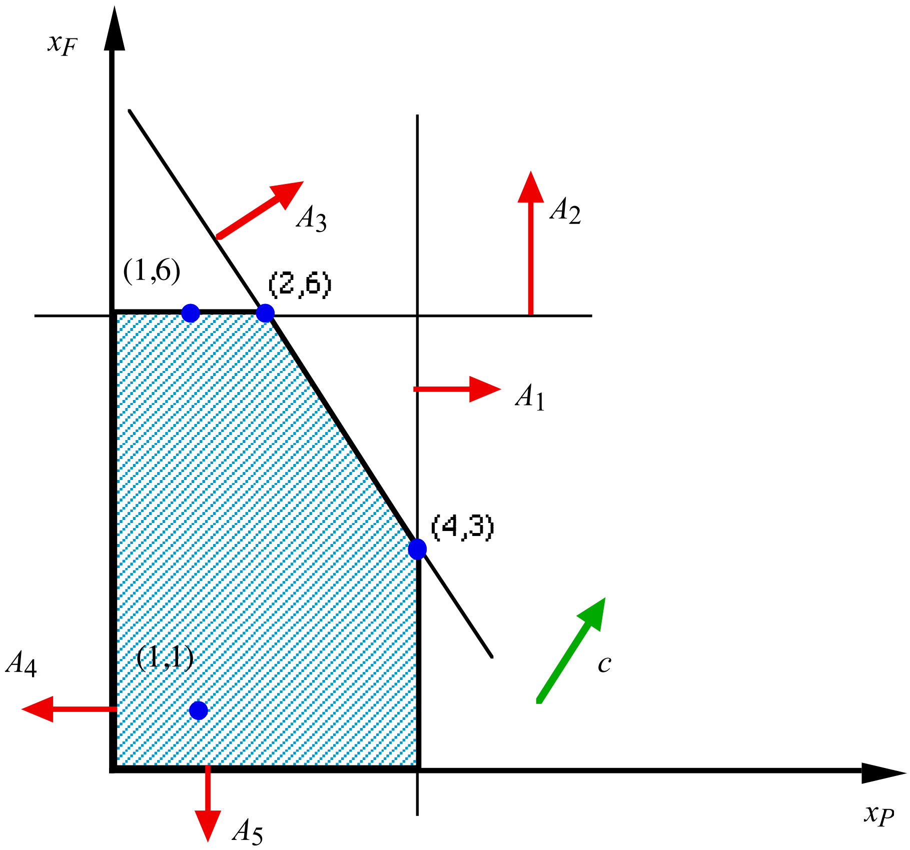

fig. 11

Per il punto $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ abbiamo che $I(\bar{x}) = \emptyset$ quindi siamo liberi di scegliere ξ come meglio crediamo senza correre il rischio di uscire dalla regione ammissibile per un passo di spostamento opportunamente grande. La scelta di ξ è quindi influenzata solamente dal gradiente della funzione obiettivo c. Se prendiamo, per esempio, $\xi = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, abbiamo $c\xi = 2 \cdot 30 + 1 \cdot 50 > 0$, quindi ξ è una direzione di crescita ammissibile e il punto $\bar{x}$ non è ottimo. Volendo determinare un passo di spostamento $\lambda>0$ che garantisce l'ammissibilità del nuovo punto $\bar{x}+\lambda\xi$ dobbiamo scegliere λ in modo che i primi tre vincoli siano rispettati quindi:

$$\lambda \leq \frac{4 - [1,0]\bar{x}}{[1,0]\xi} \Rightarrow \lambda \leq \frac{3}{2}$$

$$\lambda \leq \frac{12 - [0,2]\bar{x}}{[0,2]\xi} \Rightarrow \lambda \leq 5$$

$$\lambda \leq \frac{18 - [3,2]\bar{x}}{[3,2]\xi} \Rightarrow \lambda \leq \frac{15}{8}$$

mentre non dobbiamo preoccuparci del quarto e del quinto vincolo in quanto $A_4\xi \leq 0$ e $A_5\xi \leq 0$. Un qualsiasi valore di $\lambda \leq 3/2$ ci garantisce l'ammissibilità della nuova soluzione, ovviamente, trattandosi di un problema di massimizzazione e di una direzione di crescita ammissibile saremmo portati a scegliere λ più grande possibile.

Nel punto $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ abbiamo che $I(\bar{x}) = \{2\}$, quindi nella scelta di ξ dobbiamo preoccuparci che $[0,2]\xi \leq 0$. Una direzione di crescita ammissibile può essere ad esempio $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Si noti che, dato che $A_2\xi = 0$, ogni spostamento lungo ξ garantisce che il nuovo punto rimanga aderente al secondo vincolo.

Nel punto $\bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ invece abbiamo due vincoli attivi, $I(\bar{x}) = \{1,3\}$. È facile verificare che $\xi = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ è una direzione di crescita ammissibile.

Nel punto $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ determinare una direzione di crescita ammissibile appare meno semplice, anzi, ricordandoci che tale soluzione è ottima, dobbiamo aspettarci che non ne esista nessuna. I vincoli attivi sono $I(\bar{x}) = \{2,3\}$, le condizioni di esistenza per una direzione di crescita ammissibile sono date dal seguente sistema

$$\begin{array}{rcl} 30\xi_1 + 50\xi_2 & > & 0 \\ 2\xi_2 & \leq & 0 \\ 3\xi_1 + 2\xi_2 & \leq & 0 \end{array}$$

che non ammette soluzione.

Esercizio

Calcolare il valore massimo del passo λ per le direzioni di crescita ammissibili $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\xi = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rispettivamente per i punti $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ e $\bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Esercizio

Tracciare sulla fig. 11 le direzioni di crescita e i nuovi punti ammissibili ottenuti dopo aver applicato i passi di spostamento determinati nell'esercizio precedente.

Arrivati a questo punto intuiamo come il punto cruciale nella soluzione di un problema di *PL* risieda nella determinazione di una direzione di crescita ammissibile, sempre che ne esistano. Continuiamo nella nostra trattazione piuttosto informale ed esaminiamo in dettaglio il problema di determinare ξ formulato dal sistema (3.2). Si noti che tale sistema può venire interpretato in termini di *PL*, in particolare il primo vincolo può venire preso come funzione obiettivo da massimizzare, mentre gli altri come vincoli veri e propri. Abbiamo quindi:

$$P': \qquad \begin{array}{l} \max\ c\xi \\ \quad A_I\xi \leq 0 \end{array}$$

Si noti che, se esiste una qualsiasi soluzione ammissibile ξ' per P' tale che $c\xi'>0$, allora P' ha ottimo non limitato. Infatti se ξ' è ammissibile, lo è anche $\alpha\xi'$ per ogni $\alpha\geq 0$, e facendo crescere λ all'infinito anche il valore della funzione obiettivo $\alpha c\xi'$ va all'infinito.

Come per un qualsiasi problema di *PL* possiamo scriverne il duale: introduciamo una variabile duale η_i per ogni $i\in I(\bar{x})$:

$$D': \qquad \begin{array}{l} \min\ \eta 0 \\ \quad \eta A_I = c \\ \quad \eta \quad \geq 0. \end{array}$$

Si noti come la funzione obiettivo del duale D' sia inutile in quanto qualsiasi soluzione ammissibile vale 0 e di fatto il problema si limita ad essere un problema di ammissibilità. Anche il primale P' ha una caratteristica particolare: dato che il vettore dei termini noti è composto da tutti 0, $\xi=0$ è sempre una soluzione ammissibile. Come conseguenza del teorema della dualità debole, se esiste una soluzione per D', $\xi=0$ è una soluzione ottima per P'. Viceversa se P' ha ottimo illimitato allora D' non ha soluzione.

3.2 *Schema di algoritmo*

In base a quanto visto nel paragrafo precedente, possiamo intuire come impostare un algoritmo per la soluzione di un problema di *PL* della forma

$$P: \begin{array}{l} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array}$$

a partire da una soluzione ammissibile $\bar{x}$. L'idea alla base dell'algoritmo può venire riassunta come segue.

Fino a che nel punto corrente $\bar{x}$ esiste una direzione di crescita ammissibile ξ ci si sposta lungo ξ per un passo di spostamento tale da garantire l'ammissibilità del nuovo punto. Quando non è più possibile trovare una direzione ammissibile l'algoritmo si ferma e la soluzione $\bar{x}$ è ottima.

Vediamo di approfondire questo ultimo aspetto riguardante la condizione di arresto dell'algoritmo.

Teorema 3.1

Considerato il problema P, una sua soluzione ammissibile $\bar{x}$ e i problemi legati alla ricerca delle direzioni di crescita ammissibili P' e D'. Se D' ha soluzione allora $\bar{x}$ è una soluzione ottima per P.

Dim.

Sia $\bar{\eta}$ una soluzione ammissibile per D'. Consideriamo il duale di P:

$$D: \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0. \end{array}$$

e costruiamo una soluzione $\bar{y}$ nel seguente modo:

$$\bar{y}_i = \begin{cases} \bar{\eta} & \text{se } i \in I(\bar{x}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

La soluzione così costruita è ammissibile per D, infatti $\bar{y} \geq 0$ e $\bar{y}A = \bar{\eta}A_I = c$. Valutiamo ora il valore di $\bar{y}$ nella funzione obiettivo di D:

$$\bar{y}b = \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i b_i = \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\eta}_i b_i = \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\eta}_i A_i \bar{x} = cx$$

dove la penultima uguaglianza deriva dal fatto che per i vincoli attivi abbiamo $A_i\bar{x}=b_i$ e l'ultima deriva dal fatto che $\bar{\eta}$ è una soluzione ammissibile per D'. Abbiamo così costruito una soluzione duale ammissibile $\bar{y}$ che ha lo stesso valore della soluzione primale ammissibile $\bar{x}$, e come conseguenza del teorema della dualità debole possiamo affermare che $\bar{x}$ è ottima. ♦

Il punto delicato che abbiamo tralasciato, la cui dimostrazione lasciamo al prossimo paragrafo di approfondimento, è il fatto che o P' ha soluzione illimitata (quindi esiste una direzione di crescita ammissibile) oppure esiste una soluzione di D'. Questo fatto viene dimostrato dal cosiddetto Lemma di Farkas, vero e proprio "motore" della Programmazione Lineare.

Esempio: Serramenti e Infissi

Consideriamo nuovamente l'esempio della fabbrica di serramenti e i punti illustrati in fig.11. Con esclusione del punto $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ che, essendo un punto interno alla regione ammissibile, è palesemente non ottimo e per il quale la scelta di una direzione di crescita ammissibile è totalmente libera, formuliamo i problemi P' e D'. Nel caso di $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$, l'insieme $I(\bar{x})$ contiene il solo elemento 2 quindi abbiamo P' con un solo vincolo e D' con una sola variabile e due vincoli di uguaglianza:

$$P': \quad \begin{array}{l} \max 30\xi_1+50\xi_2 \\ \quad 2\xi_2 \leq 0 \end{array} \qquad D': \quad \begin{array}{l} \min 0\eta_1 \\ \quad 0\eta_1 = 30 \\ \quad 2\eta_1 = 50 \\ \quad \eta_1 \geq 0. \end{array}$$

Il sistema dei vincoli di D' è ovviamente inconsistente, quindi D' non ha soluzione.
Per $\bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ invece abbiamo due vincoli attivi, $I(\bar{x}) = \{1,3\}$. I problemi sono:

$$P': \quad \begin{array}{l} \max 30\xi_1+50\xi_2 \\ \quad \xi_1 \leq 0 \\ \quad 3\xi_1+2\xi_2 \leq 0 \end{array} \qquad D': \quad \begin{array}{l} \min 0\eta_1+0\eta_2 \\ \quad \eta_1+3\eta_2 = 30 \\ \quad 2\eta_2 = 50 \\ \quad \eta_1,\ \eta_2 \geq 0. \end{array}$$

Poiché in precedenza avevamo trovato una direzione di crescita ammissibile per questo punto, D' non dovrebbe avere soluzione.

Esercizio

Scrivere i problemi P' e D' per il punto $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$. D' ha soluzione?

L'algoritmo abbozzato sopra manca di un dettaglio fondamentale: supposto che D' non abbia soluzione, come ottenere una direzione di crescita ammissibile? Nella costruzione della soluzione ci facciamo guidare dalle informazioni che derivano dal problema D'.

Per semplicità consideriamo per ora il caso in cui la matrice A_I è quadrata e di rango pieno. Date queste caratteristiche della matrice A_I possiamo calcolarne l'inversa A_I^{-1} e il sistema

$$\eta A_I = c$$

ha una unica soluzione $\bar{\eta} = cA_I^{-1}$. Se $\bar{\eta}$ dovesse risultare a componenti non negative, come abbiamo dimostrato nel teorema 3.1, la soluzione $\bar{x}$ che abbiamo preso come riferimento è ottima. Se invece ci fosse un $\bar{\eta}_h<0$, partiamo proprio da questa indicazione per costruire una direzione di crescita ammissibile:

$$\bar{\xi} = - A_I^{-1} u_h \tag{3.3}$$

dove u_h denota l'h-esimo vettore unitario di ordine n, ovvero un vettore con tutti 0 tranne un 1 in posizione h-esima. In pratica la (3.3) sceglie come direzione la h-esima colonna della matrice A_I^{-1} cambiata di segno. Dimostriamo ora che $\bar{\xi}$ è effettivamente una direzione di crescita ammissibile. Innanzitutto

$$A_I\ \bar{\xi} = - A_I A_I^{-1} u_h = -u_h \leq 0$$

quindi sono rispettate le condizioni di ammissibilità, inoltre

$$c\ \bar{\xi} = - c\ A_I^{-1} u_h = -\bar{\eta}_h > 0$$

quindi anche le condizioni di crescita sono soddisfatte. Nel seguito riusciremo a dare anche una interpretazione geometrica a questa scelta, per il momento possiamo dire che in pratica la direzione che troviamo è quella che risolve il sistema

$$A_I\ \bar{\xi} = -\ u_h.$$

Esempio: Serramenti e infissi

Consideriamo il punto $\bar{x}=\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}$ per il problema della fabbrica di serramenti: $I(\bar{x})=\{2,4\}$, e $A_I=\begin{bmatrix}0 & 2\\-1 & 0\end{bmatrix}$ è di rango pieno, quindi possiamo calcolare $A_I^{-1} = \begin{bmatrix}0 & -1\\1/2 & 0\end{bmatrix}$. La soluzione del sistema dei vincoli di uguaglianza del duale D' è $\bar{\eta} = [30{,}50]\ A_I^{-1} = [25,-30]$ che, a causa della seconda componente negativa, non rispetta i vincoli di segno. Una direzione di crescita ammissibile è data da:

$$\bar{\xi} = -A_I^{-1}u_2 = -\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$

Effettivamente possiamo verificare che $c\bar{\xi} = 30>0$, e $A_I\bar{\xi} = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\leq 0$.

Consideriamo ora il caso in cui il numero di righe di A_I sia minore del numero di colonne. Questo implica che la matrice A_I non è invertibile e che il sistema $\eta A_I = c$ ha più equazioni che incognite e potrebbe risultare inconsistente. Se il sistema $\eta A_I = c$ ha soluzione a componenti maggiori o uguali a 0, per il teorema 3.1 possiamo affermare che la soluzione $\bar{x}$ è ammissibile, se invece il sistema non ha soluzione o ha soluzione con componenti negative possiamo costruirci una direzione di crescita ammissibile. Un modo per costruire una tale direzione è il seguente:

$$A_I\,\xi = 0$$
$$c\,\xi = 1.$$

In questo modo il primo insieme di vincoli ci garantisce di rimanere aderenti ai vincoli attivi in $\bar{x}$ e nell'eventuale nuovo punto ammissibile la cardinalità dell'insieme degli indici dei vincoli attivi crescerà di almeno una unità. Il secondo vincolo ci garantisce di prendere una direzione di crescita. Si noti che il valore 1 del termine noto è stato fissato arbitrariamente, e che qualsiasi altra scelta, purché positiva, fornisce una direzione di crescita.

Esempio: Serramenti e infissi

Consideriamo il punto $\bar{x}=\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$. $I(\bar{x})=\{2\}$. Come notato in precedenza il sistema $\{0\eta_1=30,\ 2\eta_1=50\}$ non ammette soluzioni. Il sistema da risolvere per ottenere una direzione di crescita ammissibile è:

$$\begin{aligned} 2\xi_2 &= 0\\ 30\xi_1 + \quad 50\xi_2 &= 1\end{aligned}$$

la cui soluzione è $\bar{\xi}=\begin{bmatrix}1/30\\0\end{bmatrix}$. Si noti che se invece di avere un termine noto 1 avessimo indicato per esempio 30, ottenevamo $\bar{\xi}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. Ad ogni modo, è evidente che tale scelta non influenza la direzione del vettore, ma solo la sua lunghezza e l'unica cosa che cambia è la scelta del passo di spostamento.

Esercizio

Si calcolino i massimi passi di spostamento lungo la direzione $\bar{\xi}=\begin{bmatrix}1/30\\0\end{bmatrix}$ e lungo la direzione $\bar{\xi}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

Rimane da trattare il caso in cui il numero di righe di A_I è maggiore del numero di colonne. Tale caso noto in letteratura come *degenerazione* è tutt'altro che infrequente in pratica. Richiede però maggiore rigore notazionale e una trattazione più approfondita, cosa che lasciamo ai successivi paragrafi di approfondimento.

Non ci rimane ora che riassumere formalmente l'algoritmo di soluzione dei problemi di *PL* così come è emerso dalle considerazioni fatte fino ad ora. L'algoritmo è indicato con il nome di *Simplesso Primale-Duale*, riceve in input la matrice *A* con *m* righe e *n* colonne, il vettore *b* dei termini noti, il vettore *c* dei costi, una soluzione ammissibile *x* e restituisce in output la soluzione ottima *x* di *P* e la soluzione ottima *y* di *D*, se *P e D* ammettono ottimo finito, e la variabile logica *illimimato* che vale true se *P* è illimitato (e *D* è vuoto).

```
Procedure Simplesso_Primale_Duale(A,b,c,x,illimitato,y);
   begin
      ottimo:=false; illimitato:=false;
      I:={i: Aix=bi};
      if I=∅ then cresci_lungo(c,x,I,illimitato);
      while not ottimo or not illimitato do
      begin
        if {ηAI=c} non ha soluzione then begin calcola ξ: AIξ=0, cξ=1;
                                                 cresci_lungo(ξ,x,I,illimitato);
                                              end;
        else if {ηAI=c} ha soluzione e ∃h: ηh<0 then begin calcola ξ: AIξ=uh;
                                                        cresci_lungo(ξ,x,I,illimitato);
                                                     end;
        else ottimo:=true;        {il sistema duale ha soluzione: ηAI=c, η≥0}
      end;
   end.
```

fig. 12

Nella prima fase della procedura, se il punto *x* dato è strettamente interno a tutti i vincoli ($I(x)=\emptyset$), allora siamo liberi di scegliere una qualsiasi direzione di crescita. La procedura sceglie $\xi=c$ che è la direzione che per unità di spostamento fornisce il maggior incremento della funzione obiettivo pari a $\|c\|^2$.

La procedura **cresci_lungo**(ξ,*x*,*I*,illimitato), chiamata all'interno dell'algoritmo, calcola il passo di spostamento lungo la direzione ξ ricevuta in input e, se questo risulta essere finito, restituisce la nuova soluzione *x* e il nuovo insieme degli indici dei vincoli attivi.

```
Procedure cresci_lungo(ξ,x,I,illimitato);
  begin
    λ:=min{( (bi - Aix)/(Aiξ) : Aiξ>0, i∈{1,…,m}\I), +∞};
    if λ=+∞ then illimitato:=true;
    else begin
        x:=x+λξ;
        I:={i: Aix=bi};
    end;
  end.
```

fig. 13

Si noti che il problema è illimitato se non esiste alcun vincolo che blocca la crescita lungo la direzione ξ; in tal caso λ è illimitato.

Esempio: Serramenti e infissi

Proviamo ad applicare l'algoritmo del Simplesso Primale-Duale al solito problema della fabbrica di serramenti a partire dal punto $x=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$. In questo punto non vi sono vincoli attivi quindi la procedura inizia muovendosi lungo il gradiente della funzione obiettivo c.

Calcoliamo quali sono i vincoli che bloccano la crescita lungo c cioè quelli per cui $A_ic>0$:

$$A_1c = [1,0]\begin{bmatrix}30\\50\end{bmatrix} = 30 > 0$$
$$A_2c = [0,2]\begin{bmatrix}30\\50\end{bmatrix} = 100 > 0$$
$$A_3c = [3,2]\begin{bmatrix}30\\50\end{bmatrix} = 190 > 0$$
$$A_4c = [-1,0]\begin{bmatrix}30\\50\end{bmatrix} = -30$$
$$A_5c = [0,-1]\begin{bmatrix}30\\50\end{bmatrix} = -50$$

Pertanto il passo di spostamento è dato da

$$\lambda = \min\{\frac{b_1 - A_1x}{30}, \frac{b_2 - A_2x}{100}, \frac{b_3 - A_3x}{190}\} = \min\{\frac{1}{30}, \frac{10}{100}, \frac{7}{190}\} = \frac{1}{30}$$

corrispondente ad uno spostamento che raggiunge il bordo del primo vincolo. Il nuovo punto è dato da:

$$x = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{30}\begin{bmatrix}30\\50\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\8/3\end{bmatrix}$$

nel nuovo punto $I(x) = \{1\}$. Si noti che il nuovo insieme degli indici dei vincoli attivi è dato dal precedente unito a tutti i vincoli che hanno determinato il massimo valore ammissibile di $\lambda=1/30$. A questo punto l'algoritmo esegue una seconda iterazione. Il sistema duale che tentiamo di risolvere è:

$$\eta_1 = 30$$
$$0\eta_1 = 50$$

che è chiaramente inconsistente. Otteniamo quindi una direzione ammissibile di crescita risolvendo il sistema:

$$\xi_1 = 0$$
$$30\xi_1 + 50\xi_2 = 1$$

quindi la direzione di spostamento è $\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/50 \end{bmatrix}$, mentre, verificato che gli unici vincoli che bloccano la crescita sono il secondo e il terzo, il passo di spostamento è dato da:

$$\lambda = \min\{\frac{b_2 - A_2x}{1/25}, \frac{b_3 - A_3x}{1/25}\} = \min\{\frac{20/3}{1/25}, \frac{2/3}{1/25}\} = \frac{50}{3}.$$

Il nuovo punto è dato da:

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 8/3 \end{bmatrix} + \frac{50}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Nel nuovo punto i vincoli attivi sono quelli attivi nel punto di partenza cioè il primo, con l'aggiunta di quello che ha determinato il valore di λ cioè il terzo, quindi $I(x) = \{1,3\}$. Risolviamo il sistema duale relativo a questi vincoli attivi:

$$\begin{aligned} \eta_1 + 3\eta_2 &= 30 \\ 2\eta_2 &= 50 \end{aligned}$$

la cui soluzione è $\eta_1 = -45$, $\eta_2 = 25$. Poiché non sono soddisfatti i vincoli sui segni delle variabili duali la soluzione non è ottima e possiamo costruire una direzione di crescita ammissibile risolvendo il sistema:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -1 \\ 3\xi_1 + 2\xi_2 &= 0 \end{aligned}$$

quindi $\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$. Il massimo spostamento lungo questa direzione è dato da

λ = min{\f(b_2 - A_2x,3), \f(b_4 - A_4x,1} = min{\f(6,3), \f(4,1)} = 2.

Il nuovo punto è dato da:

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

in cui i vincoli attivi sono $I(x)=\{2,3\}$. Il sistema duale è:

$$\begin{aligned} 3\eta_2 &= 30 \\ 2\eta_1 + 2\eta_2 &= 50 \end{aligned}$$

che abbiamo già visto avere soluzione $\eta_1 = 15$, $\eta_2 = 10$. Arrivato a questo punto l'algoritmo termina.

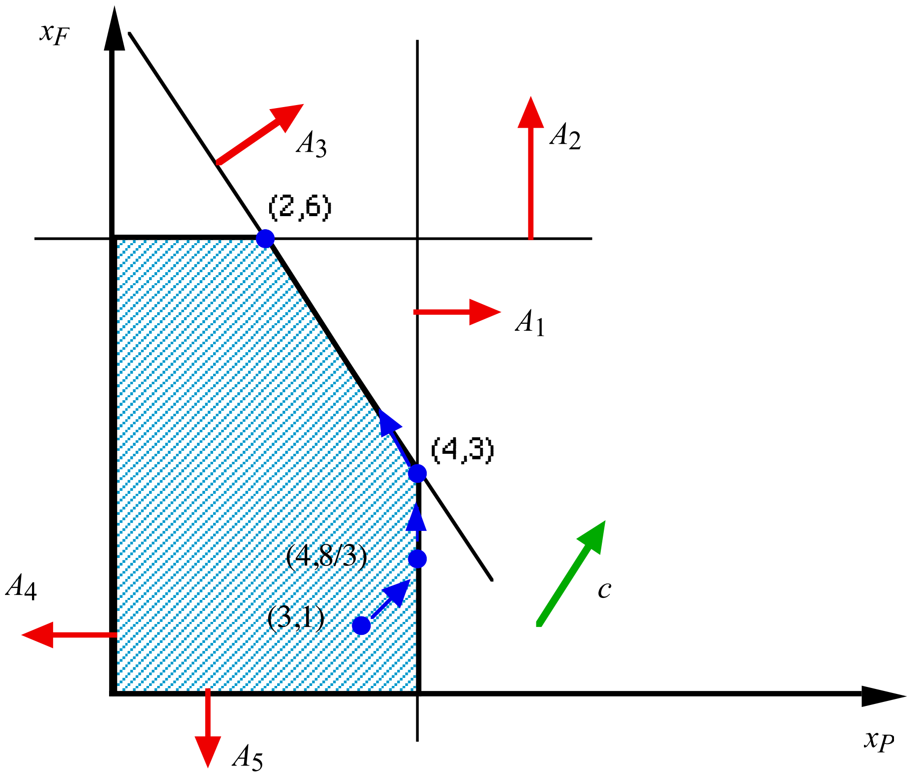

fig. 14: evoluzione dell'algoritmo con l'indicazione delle direzioni di crescita

**3.3 Programmazione Lineare su coni*

Abbiamo visto come il cuore dell'algoritmo di soluzione dei problemi di *PL* richieda di affrontare ad ogni iterazione problemi di programmazione lineare particolarmente semplici la cui regione ammissibile è rappresentabile da coni poliedrici:

$$P': \quad \max\ c\xi \qquad A\xi \le 0 \qquad\qquad D': \quad \min \eta\, 0 \qquad \eta A = c \qquad \eta \ge 0.$$

Nel seguito assumiamo, senza perdita di generalità, che la matrice A, $m\times n$, sia di rango massimo e che il vettore c sia non nullo. L'insieme di disequazioni $A\xi\le 0$ definisce ovviamente un cono poliedrico. Ma anche la regione ammissibile del duale fa riferimento ad un cono poiché l'insieme dei punti $C=\{z=\eta A,\ \eta\ge 0\}$ è esattamente il cono finitamente generato dalle righe di A cioè $C=cono\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Quindi il problema duale consiste nel verificare se il vettore c appartiene al cono C.
Come osservato in precedenza, P' ammette sempre almeno una soluzione: la soluzione nulla ($\xi=0$) è ammissibile e ha valore nullo della funzione obiettivo. Se esiste una soluzione ammissibile $\bar{\xi}\neq 0$ con $c\bar{\xi}$))>0 allora anche la soluzione $\alpha\bar{\xi}$ è ammissibile per qualsiasi reale $\alpha\ge 0$; in questo caso P' è superiormente illimitato, e $\bar{\xi}$ individua una direzione ammissibile di crescita illimitata per la funzione obiettivo. Infatti, scegliendo opportunamente il valore del parametro α, possiamo costruire soluzioni ammissibili con valore della funzione obiettivo, arbitrariamente grande. Vale il seguente teorema:

Teorema 3.2
Un problema di programmazione lineare su coni o ha un ottimo nell'origine, oppure è illimitato.

È facile verificare che nel caso in cui P' è illimitato, allora D' non può avere soluzione e, viceversa, se D' ammette soluzione, allora P non può essere illimitato. Questa è una diretta conseguenza del teorema debole della dualità applicato al caso particolare della PL su coni.
Se P' è illimitato, esiste un vettore $\bar{\xi}$ tale che risulti:

$$A\bar{\xi} \leq 0,$$

$$c\bar{\xi} > 0,$$

mentre se D' è ammissibile, allora esiste un $\bar{\eta}$ tale che:

$$\bar{\eta}A = c,$$

$$\bar{\eta} \geq 0.$$

Dimostriamo ora il *Teorema Fondamentale delle Disuguaglianze Lineari* conosciuto anche come *Lemma di Farkas* [Farkas 1884].

Teorema 3.3
Sia A una matrice m×n di rango massimo, e sia $c\in\boldsymbol{R}^n$. Allora i due sistemi:

$$i)\ \begin{cases}\eta A = c\\ \eta \geq 0\end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases}A\xi \leq 0\\ c\xi > 0\end{cases}$$

sono mutuamente esclusivi, cioè o ha soluzione il sistema i) oppure ha soluzione il sistema ii).

Dim.
Supponiamo che esista una soluzione per il sistema i), cioè un vettore $\bar{\eta}\geq 0$ con $\bar{\eta}A=c$. Dimostriamo che non può esistere una soluzione $\bar{\xi}$ con $c\bar{\xi}>0$ e $A\bar{\xi} \leq 0$. La dimostrazione è per assurdo. Se esistesse una tale $\bar{\xi}$ avremmo:

$$0 < c\bar{\xi} = \bar{\eta}A\bar{\xi} \leq 0,$$

dove la prima uguaglianza deriva da $c = \bar{\eta}A$, mentre il $\leq$ deriva da $A\bar{\xi} \leq 0$ e $\bar{\eta}\geq 0$. Abbiamo quindi un assurdo.
Dimostriamo ora che se non esiste una soluzione per il sistema i) deve esistere una soluzione per il sistema ii).Se non esiste un $\bar{\eta}\geq 0$ con $\bar{\eta}A=c$ significa che c non può essere scritto come combinazione lineare non negativa dei gradienti dei vincoli, quindi non appartiene al cono generato dai vettori A_i, $i=1, \ldots, m$. Tale cono è dato da $S = \{z\text{: } z = \eta A,\ \eta\geq 0\}$. Dato che c non appartiene all'insieme convesso e chiuso S, per il teorema dell'iperpiano separatore, sappiamo che esiste un iperpiano che separa c da tutti i punti di S. Quindi esiste l'iperpiano di gradiente $\bar{\xi}$ tale che

$$c\bar{\xi} > z\bar{\xi} \quad \forall z\in S.$$

Sostituendo a z la sua definizione abbiamo che

$$c\bar{\xi} > \eta A\bar{\xi} \qquad \forall \eta\geq 0.$$

Scegliendo $\eta=0$ segue che $c\bar{\xi} > 0$. Dato che η può assumere anche valori arbitrariamente grandi (e crescere all'infinito) mentre $c\bar{\xi}$ ha un valore finito, necessariamente deve essere $A\bar{\xi} \leq 0$. Abbiamo quindi trovato che esiste una soluzione del sistema ii). ♦

Esempio
Consideriamo il vettore $c=[-1,4]$ e la matrice

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il problema P' ha la seguente rappresentazione geometrica:

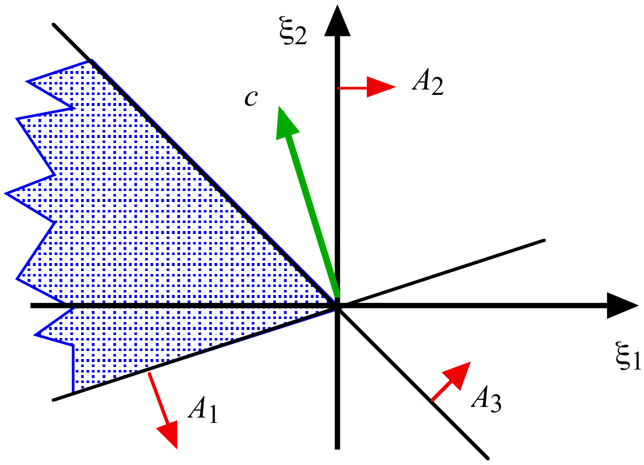

fig. 15: il cono poliedrico dello spazio primale

Provando a risolvere geometricamente il problema P' vediamo che non esiste una soluzione ottima finita. La rappresentazione geometrica del duale è la seguente:

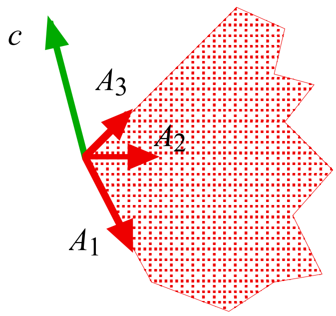

fig. 16: spazio del duale dato dal cono finitamente generato da i gradienti dei vincoli

Anche in questo caso è facile verificare geometricamente che il vettore c non appartiene al cono finitamente generato da A_1, A_2 e A_3.

Esercizio
Rappresentare graficamente i problemi P' e D' con la matrice A dell'esempio precedente e con il vettore c=[2,-1] e fornire la soluzione ottenuta geometricamente per entrambi i problemi.

Poniamoci ora il problema di risolvere analiticamente P'. Da quanto detto segue che, a questo scopo, è sufficiente trovare un vettore ammissibile $\bar{\xi}$ tale che $\bar{\xi}$>0 oppure, in alternativa, un vettore $\bar{\eta}\geq 0$ con $\bar{\eta}$))$A=c$. Nel primo caso si proverebbe l'illimitatezza del problema, mentre nel secondo caso si potrebbe concludere che l'origine è una soluzione ottima. Considereremo separatamente tre casi.

i) $m=n$.

In questo caso la matrice A è quadrata e, essendo di rango pieno, il sistema di equazioni del problema D' è unica ed è data da $\overline{\eta}=cA^{-1}$. Se è $\overline{\eta}\geq 0$, allora la soluzione ottima di P' è $\overline{\xi}=0$. Se invece $\overline{\eta}\not\geq 0$, cioè se esiste un indice k per cui $\overline{\eta}_k<0$, indicando con u_k il k-esimo vettore unitario, si ha $\overline{\eta}_k=cA^{-1}u_k$, quindi, ponendo $\overline{\xi}=-A^{-1}u_k$, avremmo $c\overline{\xi} > 0$, avendo così determinato una direzione di crescita illimitata per la funzione obiettivo.

In pratica abbiamo così dimostrato che:

- o esiste $\overline{\eta} \geq 0$ tale che $\overline{\eta}A=c$
- oppure esiste $\overline{\xi}\in \boldsymbol{R}^n$ e un indice k per cui

$$A_i\overline{\xi} \begin{cases} = 0 & \text{se } i\neq k \\ = -1 & \text{se } i=k \end{cases}$$

$$\text{con} \quad c\overline{\xi}>0.$$

Dal punto di vista geometrico, il vettore $\overline{\xi}=-A^{-1}u_k$, individua una *direzione ammissibile di crescita illimitata*, infatti lungo tale direzione possiamo muoverci facendo crescere la funzione obiettivo, senza mai uscire dal cono; tale direzione è quella lungo la retta intersezione di tutti gli iperpiani che definiscono il cono escluso il k^{esimo}: essa è il luogo dei punti $\xi=\alpha\overline{\xi}$, con $\alpha\geq 0$, e quindi delle soluzioni del sistema definito dai vincoli

$$A_i\xi \begin{cases} = 0, & i\neq k, \\ < 0, & i=k. \end{cases}$$

ii) $m<n$.

In questo caso, essendo A di rango massimo, il sistema $\eta A=c$ o non ha soluzioni o ha una sola soluzione. Possiamo, a parte un eventuale riordinamento delle colonne di A, porre $A=[A',A'']$, con A' matrice quadrata di ordine m, e $\det(A') \neq 0$; corrispondentemente decomponiamo c in (c',c''). Si ha allora che se $\eta A=c$ ammette soluzione, tale soluzione sarà $\overline{\eta} = c'A'^{-1}$.

Tre casi sono possibili:

a) $\overline{\eta}A = c$, con $\overline{\eta} \geq 0$, allora, per quanto detto sopra, l'origine è soluzione ottima di P'.

b) $\overline{\eta}A = c$, con $\overline{\eta}_k = c'A'^{-1}u_k < 0$, per qualche indice k. Allora il vettore $\overline{\xi}=(\xi', \xi'')$, con $\xi'= -A'^{-1}u_k$ e $\xi'' = 0$ è una soluzione di P', e $c\overline{\xi} > 0$; infatti

$$A\,\overline{\xi} = A'\xi' + A''\xi''= -A'A'^{-1}u_k = -u_k \leq 0,$$

$$c\,\overline{\xi} = c'\xi' + c''\xi''= \overline{\eta}\,A'\xi' = -\overline{\eta}\,A'A'^{-1}u_k = -\overline{\eta}_k > 0.$$

c) Il sistema $\eta A = c$ non ha soluzioni e cioè $\overline{\eta}A'' = c'A'^{-1}A'' \neq c''$. Pertanto esiste un indice k tale che o $c''_k > c'A'^{-1}A''u_k$, oppure $c''_k < c'A'^{-1}A''u_k$.

Consideriamo il primo caso (l'altro si tratta similmente), avremo che il vettore $\overline{\xi}=(\xi', \xi'')$, con $\xi' = -A'^{-1}A''u_k$ e $\xi'' = u_k$, è ammissibile per P', con $c\overline{\xi}>0$; infatti:

$$A\,\overline{\xi} = A'\,\xi' + A''\xi'' = -A'A'^{-1}A''u_k + A''u_k = 0,$$

$$c\overline{\xi} = c'\,\xi' + c''\xi'' = -c'A'A'^{-1}A''u_k + c''u_k = c''_k - c'A'^{-1}A''u_k > 0.$$

iii) $m>n$.

Cerchiamo di ricondurci al caso *i*) di matrice quadrata. Sia A_B una sottomatrice quadrata non singolare di A, con $B\subset\{1,...,m\}$*; cioè A_B è una *base* per $\boldsymbol{R}^n$. Chiameremo nel seguito B una *base* e A_B una (sotto)*matrice di base* di A, e indicheremo con $h=B(j)$, $j=1,\ldots,n$, il j-esimo indice contenuto in B (in pratica l'insieme B si considera implementato per mezzo di una lista, e $B(j)$ è il j-esimo elemento della lista). Poiché, per ipotesi il rango di A, $r(A)$, è uguale a n, almeno una base B esiste sempre. Secondo quanto visto al punto *i*), si ha che:

- o esiste $\bar\eta_B \geq 0$ tale che $\bar\eta_B A_B=c$
  Allora il vettore $(\bar\eta_B, \bar\eta_N)$, con $\bar\eta_N=0$ e $N=\{1,\ldots n\}\backslash B$, è una soluzione ammissibile per D', e quindi $\xi=0$ è l'unica soluzione ottima di P'. In questo caso diremo che B è una base *duale ammissibile*.
- oppure esiste $\bar\xi\in\boldsymbol{R}^n$ e $h\in B$ per cui con $c\bar\xi>0$.

  $$A_i\bar\xi \begin{cases} = 0 & \text{se } i\in B\backslash\{h\} \\ = -1 & \text{se } i=h \end{cases}$$

  Allora, se per i rimanenti vincoli risulta $A_N\bar\xi\leq 0$, essendo $\bar\xi$ ammissibile per P', abbiamo dimostrato che P' è illimitato e abbiamo determinato una direzione di crescita, $\bar\xi=-A_B^{-1}u_k$, con $h=B(k)$, altrimenti ($\bar\eta_B \not\geq 0$ e $A_N\bar\xi\not\leq 0$) non possiamo ancora dire nulla né su P' né su D', e dobbiamo cercare un'altra base B.

L'algoritmo ***S***, di fig. 17, riceve in input, oltre alla matrice A e al vettore dei costi c, una base iniziale B, e la modifica ad ogni passo, fino a che non si ottiene una base che sia o duale ammissibile o che individui una direzione di decrescita per il primale P'. La procedura restituisce in output una variabile che indica in quale caso del lemma di Farkas ci troviamo, e a seconda del caso una direzione ξ o una soluzione duale η. La procedura restituisce pure l'indice dell'ultimo elemento che è stato eliminato dalla base.

```
Procedure S (A,c,B,η̄,ξ̄,caso,h):
  begin
  1  terminazione:=false;
     repeat
  2    η̄B:=cAB^-1;
  3    if η̄B≥0  then begin terminazione:=true; caso:=1; η̄=[η̄B,0] end
             else  begin
  4               h:=min{i∈B: η̄i<0};
  5               ξ̄:=−AB^-1 uk;                                  {k : B(k)=h}
  6               if Aξ̄≤0 then begin terminazione:=true; caso:=2 end
                    else  begin
  7                       s:=min{i: Aiξ̄>0};
  8                       B:=B∪{s}\{h}
                        end
                end
     until terminazione
  end.
```

fig. 17: algoritmo per la scelta della base

Se l'algoritmo restituisce caso=1, allora la base B è duale ammissibile e l'origine (cioè il vertice del cono) è la soluzione ottima di P', altrimenti, quando è caso=2, l'indice h individua una direzione ammissibile di decrescita per la funzione obiettivo, cioè la direzione $-A^{-1}_B u_k$, con $h=B(k)$.

---

* data una matrice A ed un insieme di indici B, A_B è la sottomatrice formata dalle righe A_i, $i\in B$. Similmente a_B denota il sottovettore del vettore a contenente le componenti i cui indici sono in B.

Teorema 3.4

*La procedura **S** termina in un numero finito di passi fornendo una coppia di vettori ($\bar{\xi}, \bar{\eta}$), tale che risulti:*

$$o \quad \begin{cases} \bar{\eta}A = c \\ \bar{\eta} \geq 0 \end{cases} \qquad \textit{oppure} \qquad \begin{cases} A\bar{\xi} \leq 0 \\ c\bar{\xi} > 0. \end{cases}$$

La dimostrazione della correttezza della procedura ***S*** segue dalle considerazioni fatte in precedenza. La sua terminazione in un numero finito di passi è invece meno semplice da dimostrare e si basa sulla scelta degli indici degli elementi da fare uscire ed entrare di base (istruzioni 4 e 7). Questa regola che sceglie ogni volta l'indice minimo, è nota come r*egola anticiclo di Bland*.

La procedura di fig. 18 riassume il procedimento per la soluzione dei problemi di programmazione lineare su coni.

```
Pocedure Simplesso_su_Coni (A,c,B,η̄,ξ̄,caso,h):
  begin
    if |B|=n then S(A,c,B,η̄,ξ̄,caso,h)
      else begin
          Scegli A': det(A')≠0;                     {A=[A',A"]}
          η̄:=c'A'^-1;
          if η̄A"=c" then                            {il sistema ha soluzione}
            if η̄≥0  then caso:=1                     {caso i}
                else begin
                  let h: η̄h<0;
                  ξ̄:=[ −A'^-1 eh ; 0 ]; caso:=2       {caso ii}
                end
          else begin                                 {il sistema non ha soluzione}
                let k: c"k−η̄A"uk≠0;
                α:=sign(c"k−η̄A"uk);
                ξ̄:=α [ −A'^-1 A"uk ; uk ]; caso:=2; h:=0   {caso ii}
              end
        end
  end.
```

fig. 18: algoritmo per la soluzione di problemi di *PL* su coni

Si osservi che, per semplicità di notazione, si è supposto che la matrice *A*' sia costituita dalle prime colonne di *A*. Inoltre, il parametro *h* ha significato solo quando si ha soluzione $\bar{\xi}$ del secondo sistema (caso=2), mentre $h = 0$ quando $\bar{\eta}A=c$ non ha soluzioni.

Osserviamo che, data una base *B*, lo scalare $-cA_B^{-1}u_k = -\bar{\eta}_h$, dove $h=B(k)$ è l'indice del vincolo che esce dalla base, è l'incremento unitario della funzione obiettivo di *P*' quando ci si allontana dal bordo del vincolo *h*-esimo lungo la direzione $\bar{\xi}=-A_B^{-1}u_k$, cioè quando incrementiamo di una unità la variabile di scarto del vincolo *h*-esimo, lasciando al valore 0 le variabili di scarto degli altri vincoli in base (cioè degli altri vincoli i cui indici sono in *B*). Per questo, il valore $-cA_B^{-1}u_k$ viene usualmente indicato come il *costo ridotto* della variabile di scarto relativa al *h*-esimo vincolo (o, più semplicemente, il costo ridotto del *h*-esimo vincolo).

Se consideriamo adesso la coppia di problemi duali P' e D' relativi alla programmazione lineare su coni introdotta all'inizio del paragrafo, dal teorema 3.3 segue che P' ha soluzione ottima finita **se e solo se** D' ha soluzione. Nel seguente corollario riassumiamo questo importante risultato per le varie coppie di problemi duali su coni.

Corollario 3.5

P' ha soluzione ottima finita se e solo se D' ha soluzione:

$$(3.4a) \qquad P: \begin{array}{l} \max c\xi \\ \quad A\xi \le 0 \end{array} \qquad D: \begin{array}{l} \min \eta\, 0 \\ \quad \eta A = c \\ \quad \eta \;\; \ge 0 \end{array}.$$

$$(3.4b) \qquad P: \begin{array}{l} \max 0\xi \\ \quad A\xi = b \\ \quad \xi \;\; \ge 0 \end{array} \qquad D: \begin{array}{l} \min \eta b \\ \quad \eta A \ge 0 \end{array};$$

$$(3.4c) \qquad P: \begin{array}{l} \max 0\xi \\ \quad A\xi \le b \end{array} \qquad D: \begin{array}{l} \min \eta b \\ \quad \eta A = 0 \\ \quad \eta \;\; \ge 0 \end{array};$$

$$(3.4d) \qquad P: \begin{array}{l} \max 0\xi \\ \quad A\xi \le b \\ \quad \xi \;\; \ge 0 \end{array} \qquad D: \begin{array}{l} \min \eta b \\ \quad \eta A \ge 0 \\ \quad \eta \;\; \ge 0 \end{array}.$$

Esercizio

Dimostrare il corollario 3.5 per le coppie (3.4b), (3.4c), (3.4d) a partire dalla (3.4a).

**3.4 Il teorema forte della dualità e sue conseguenze*

Vediamo di formalizzare uno dei risultati principali della programmazione lineare che abbiamo già informalmente visto in precedenza, ma che possiamo dimostrare solo dopo aver visto il teorema fondamentale delle disuguaglianze lineari. Consideriamo la coppia di problemi duali

$$P: \max \{cx: Ax \le b\} \qquad\qquad D: \min \{yb: yA = c, y \ge 0\}$$

Teorema 3.6 (*Teorema forte della dualità*)

Se P e D ammettono soluzioni ammissibili, allora $\max\{cx: Ax\le b\} = \min\{yb: yA=c, y\ge 0\}$.

<u>Dim.</u>

Se è c=0, allora è $\max\{cx: Ax\le b\}=0$, mentre y=0, essendo soluzione ammissibile per D, è anche ottima; infatti $yb\ge 0$ per ogni y ammissibile ($yb\ge yAx=0x$). Quindi il teorema è in questo caso banalmente vero.

Consideriamo ora il caso più interessante in cui sia $c\ne 0$. Sia $\bar{x}$ una soluzione ottima per P, e indichiamo con I e $\bar{I}$ l'insieme degli indici dei vincoli attivi per $\bar{x}$ e il suo complemento. Si osservi che $|I| \ge 1$. Infatti se $I = \emptyset$ allora esiste $\lambda > 0$ tale che $x' = \bar{x}+\lambda c$ è una soluzione ammissibile per P. Infatti

$$Ax' = A\bar{x}+\lambda Ac \le b \qquad \forall\lambda\in[0,\bar{\lambda}],$$

dove

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} \min\{\dfrac{b_i - A_i\bar{x}}{A_ic}: A_ic > 0\}, & \text{se } \exists\, i \in \{1,\dots,m\}: A_ic > 0, \\ +\infty, & \text{se } A_ic \le 0 \;\forall\, i \in \{1,\dots,m\}. \end{cases}$$

Poiché $cx' = c\bar{x}+\lambda\|c\|^2$, si ha che $cx' > c\bar{x}$, $\forall\lambda\in(0,\bar{\lambda}]$. Quindi se $I = \emptyset$ si ha che c è una direzione ammissibile di crescita contro l'ipotesi che $\bar{x}$ sia la soluzione ottima. Possiamo concludere allora che $I \neq \emptyset$.

Sia $\xi\in\boldsymbol{R}^n$ una direzione ammissibile ($A_I\xi \leq 0$) e sia:

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} \min\{\frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_i\xi}: i\in\bar{I} \text{ e } A_i\xi>0\}, & \text{se } \exists\ i\in\bar{I}: A_i\xi>0, \\ +\infty, & \text{se } A_i\xi\leq 0 \ \ \forall\ i\in\bar{I}; \end{cases}$$

poiché $\bar{x}$ è una soluzione ottima deve risultare $c\xi\leq 0$, altrimenti risulta $c\bar{x}+\bar{\lambda}c\xi > c\bar{x}$ che contraddice l'ipotesi che $\bar{x}$ sia ottimo. Quindi il sistema:

$$\begin{cases} A_I\xi \leq 0 \\ c\xi > 0 \end{cases}$$

non ha soluzione e, per il teorema 3.3, il sistema

$$\begin{cases} \eta A_I = c \\ \eta \geq 0 \end{cases}$$

ha soluzione $\bar{\eta}$. Si ha allora che $\bar{y} = (\bar{y}_I, \bar{y}_{\bar{I}}) = (\bar{\eta}, 0)$ è una soluzione ammissibile per D.
Inoltre risulta che $\bar{y}b = \bar{y}_I b_I = \bar{y}_I A_I\bar{x} = c\bar{x}$, quindi, per il teorema debole della dualità, $\bar{y}$ è ottima. ♦

Una immediata conseguenza del teorema 3.6 è un metodo per individuare quando siamo in presenza di una soluzione ottima. Infatti $\bar{x}$ è ottima per P se e solo se c appartiene al cono generato dai gradienti dei vincoli attivi.

<u>Esempio: serramenti ed infissi</u>

Consideriamo nuovamente il problema della fabbrica di serramenti e verifichiamo l'ottimalità del punto $\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$, limitandoci a fare considerazioni di carattere geometrico. In questo punto i vincoli attivi sono il secondo e il terzo. Dal disegno risulta evidente il fatto che c appartiene al cono generato da A_2 e A_3. Anche per il punto $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ è facile verificare la non ottimalità, infatti c non appartiene al cono generato da A_1 e A_3, gradienti dei vincoli attivi.

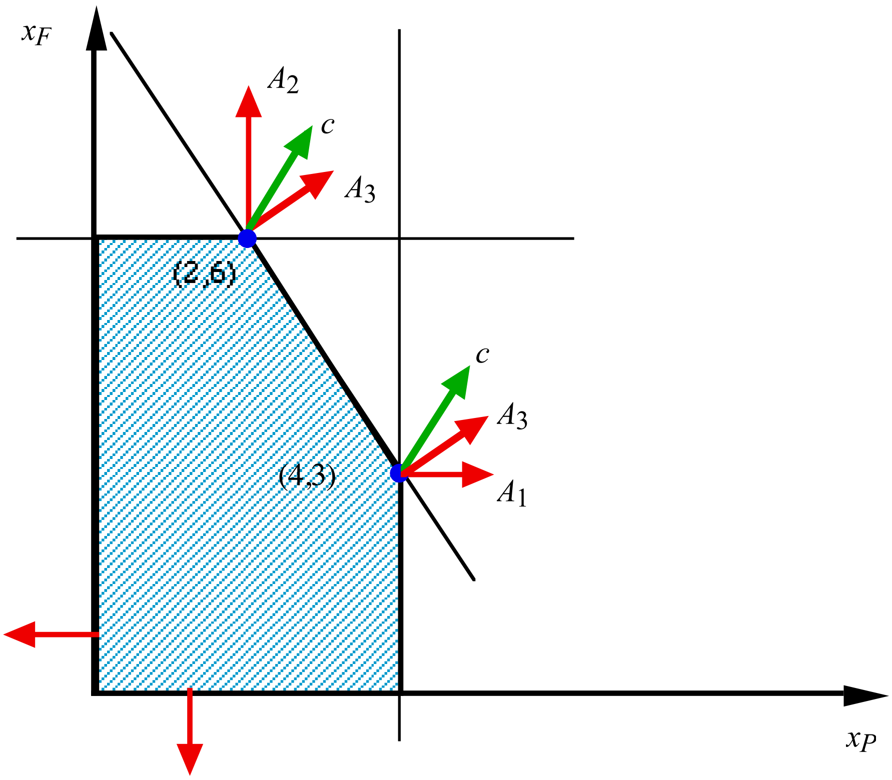

fig. 19: verifica dell'ottimalità

Completiamo la caratterizzazione delle coppie di problemi duali P e D.

Teorema 3.7

Se P ha ottimo finito, allora D ha ottimo finito.

Dim.

Dimostriamo il teorema per la coppia P: $\max\{cx: Ax \leq b\}$, D: $\min\{yb: yA = c, y \geq 0\}$, ma il risultato può venire esteso a qualsiasi coppia di problemi duali.

Sia $\bar{x}$ una soluzione ottima per P.

Dal teorema debole della dualità (teorema 2.2) segue che D è limitato inferiormente.

Se $\{y: yA = c, y \geq 0\} = \emptyset$ allora, per il teorema 3.3, $\exists$ z: $Az \leq 0$ e $cz > 0$ che implica l'esistemza di una soluzione ammissibile migliore di $\bar{x}$: $\bar{x} + z \in \{x: Ax \leq b\}$, $c(\bar{x} + z) > c\bar{x}$. Assurdo poiché x è una soluzione ottima per P. ♦

Quindi, data una coppia di problemi duali P e D, possiamo riassumere nella seguente tabella tutti i casi che si possono verificare.

D \ P	ottimo finito	illimitato	vuoto
ottimo finito	*		
illimitato			*
vuoto		*	*

fig. 20: rapporti tra P e D. * indica i casi che si possono verificare

In realtà rimane da verificare il caso di entrambi i problemi vuoti, cosa dimostrabile facilmente con un esempio semplice da interpretare geometricamente:

$$\max\{x_1: -x_1 - x_2 \leq -1, x_1 + x_2 \leq -1\}, \min\{-y_1 - y_2: -y_1 + y_2 = 1, -y_1 + y_2 = 0, y_1, y_2 \geq 0\}.$$

*3.5 *Algoritmo del Simplesso Primale-Duale*

Alla luce dei risultati fino qui illustrati, descriviamo più formalmente l'algoritmo del simplesso primale-duale, includendo la trattazione della degenerazione, cioè di quei casi in cui il numero di vincoli attivi in un punto è maggiore o uguale ad n.

Si consideri come al solito la coppia (P, D):

$$P:\quad \max\ cx \qquad\qquad D:\quad \min\ yb$$
$$Ax \le b \qquad\qquad\qquad yA = c$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad y \ge 0$$

Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile per P. Assumiamo senza perdita di generalità che $\bar{x}$ appartenga alla frontiera dell'insieme ammissibile di P, cioè che l'insieme I dei vincoli attivi in $\bar{x}$ sia non vuoto.

Un punto $\bar{x}$ per cui risulti $I \neq \emptyset$ è facilmente ottenibile a meno che non sia P superiormente illimitato e di conseguenza D vuoto: è sufficiente, partendo da un punto ammissibile qualsiasi, muoversi nella direzione indicata dal vettore c fino a che non si incontra la frontiera. Nel seguito indicheremo con **Determina**($\bar{x}$,I,*Dvuoto*) la procedura che o restituisce una soluzione ammissibile $\bar{x}$ tale che $|I| \ge 1$ oppure stabilisce che D è vuoto (*Dvuoto*=true).

Possiamo definire i seguenti due problemi complementari:

- il *Primale Ristretto* (*PR*):

$$\exists\ \xi: \begin{cases} A_I\xi \le 0 \\ c\xi > 0; \end{cases}$$

- ed il *Duale Ristretto* (*DR*):

$$\exists\ \eta: \begin{cases} \eta A_I = c \\ \eta \ge 0. \end{cases}$$

Di essi uno solo ammette soluzione. Per determinare quale di essi ammetta soluzione è sufficiente chiamare la procedura **Simplesso_su_Coni**(A_I,c,B,η,ξ,caso,h) scegliendo B in modo che $B \subseteq I$ sia un insieme di cardinalità massima tale che le righe di A_B siano linearmente indipendenti.

Indicheremo con **Scegli**(B,I) la procedura che restituisce B così definito.

Se PR ha soluzione ξ, allora si considerino le soluzioni del tipo $x(\lambda)=\bar{x}+\lambda\xi$, con $\lambda \ge 0$. È immediato verificare che:

- ξ è una direzione di crescita. Infatti risulta

$$cx(\lambda) = c\bar{x} + \lambda c\xi > c\bar{x} \qquad \text{per } \lambda > 0;$$

- ξ è una direzione ammissibile. Per ogni $\lambda \in [0,\bar{\lambda}]$, dove

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} \min\{\dfrac{b_i - A_i\bar{x}}{A_i\xi} : i \in \bar{I} \text{ e } A_i\xi > 0\}, & \text{se } \exists\ i \in \bar{I} \text{ e } A_i\xi > 0, \\ +\infty, & \text{se } \{i \in \bar{I}: A_i\xi > 0\} = \emptyset, \end{cases}$$

$x(\lambda)$ è una soluzione ammissibile. Inoltre se $\bar{\lambda}=+\infty$, P non è superiormente limitato e D è vuoto.

Riassumendo, se PR ha soluzione, o D è vuoto oppure si determina la soluzione $x(\bar{\lambda})$ tale che $cx(\bar{\lambda}) > c\bar{x}$. Si osservi infatti che per costruzione è $\bar{\lambda} > 0$.

Se DR ha soluzione $\bar{\eta}$, allora $\bar{x}$ e $\bar{y} = (\bar{\eta}, 0)$ sono soluzione ottime per P e D rispettivamente.

L'algoritmo riassunto nella procedura di fig. 21 riceve in input una soluzione ammissibile $\bar{x}$ e l'insieme dei vincoli attivi I.

```
Procedure Simplesso_Primale_Duale (A,b,c,I,x̄,ȳ,Dvuoto):
  begin
    ottimo:=false; Dvuoto:=false;
    if |I|=0 then Determina(x̄,I,Dvuoto);
    Ī={1,..,m}\I ;
    if not Dvuoto then Scegli (B,I);
    while not (Dvuoto or ottimo) do
      begin
        Simplesso_su_Coni(A_I,B,c,η,ξ,caso,h);
        if caso=1
          then begin ȳ_I:=η; ȳ:=[ȳ_I,0]; ottimo:=true end
          else if {i∈Ī: A_iξ>0}=Ø then Dvuoto:=true
                 else begin
                        λ̄:=min { (b_i−A_i x̄)/(A_iξ) : i∈Ī e A_iξ>0};
                        x̄:=x̄+λ̄ξ; I:={i: A_i x̄=b_i};
                        if |B|=n
                          then begin k:=min{i: i∈I∩Ī}; B:=B\{h}∪{k} end
                          else Scegli(B,I);
                        Ī:={1,..,m}\I
                      end
      end
  end.
```

fig. 21: l'algoritmo del Simplesso Primale-Duale

Indichiamo con I_r l'insieme degli indici attivi alla iterazione r dell'algoritmo e con B_r un suo sottoinsieme massimale corrispondente a righe linearmente indipendenti della matrice A_{I_r}; consideriamo il caso $r(A_{I_r})<n$, cioè $|B_r|<n$. La procedura **Simplesso_su_Coni** o restituisce $\eta\geq 0$ (*caso*=1) causando la terminazione della procedura, oppure restituisce ξ: $A_{I_r}\xi \leq 0$, $c\xi > 0$ (*caso*=2), in accordo ai seguenti casi:

a) $\eta A_{I_r} = c$ ha soluzione e $\eta_h < 0$. In questo caso risulta $A_h\xi < 0$, $A_i\xi = 0$, $i\in I_r\backslash\{h\}$.
È immediato allora verificare che $h\notin I_{r+1}$, infatti $A_h\bar{x} + \bar{\lambda}A_h\xi < b_h$ poiché $\bar{\lambda} > 0$. Viene chiamata la procedura **Scegli**(B,I) che restituisce un insieme B_{r+1} con cardinalità maggiore o uguale della cardinalità di B_r. Infatti lo spostamento di $\bar{\lambda}$ lungo la direzione ammissibile di crescita ξ rende attivo almeno un indice k, precedentemente non attivo, tale che la riga A_k non è linearmente dipendente dalle righe di $A_{B_r\backslash\{h\}}$. In caso contrario esisterebbe un vettore non nullo γ tale che:

$$A_k = \sum_{i\in B_r\backslash\{h\}} \gamma_i A_i .$$

Moltiplicando per ξ si ha $A_k\xi = \sum_{i\in B_r\backslash\{h\}}\gamma_i A_i\xi = 0$, ma $A_k\xi > 0$ poiché $k\notin I_r$. Assurdo.

Si noti che si ottiene $|B_{r+1}|>|B_r|$ nel caso in cui esistano due o più indici $k_1,\ldots, k_s \in I_{r+1}\backslash I_r$ tali che la matrice $A_{B_r\backslash\{h\}\cup\{k_1,\ldots,k_s\}}$ sia formata da righe linearmente indipendenti.

b) $\eta A_{I_r} = c$ non ha soluzione; **Simplesso_su_Coni** affronta un problema con un numero di righe inferiore al numero di colonne ($|I_r|<n$) che non ammette soluzioni, pertanto restituisce una direzione ammissibile di crescita ξ e l'indice h=0. Poiché $A_{I_r}\xi$=0 risulta $I_{r+1}\supset I_r$; esiste quindi almeno un indice $k\in I_{r+1}\backslash I_r$ per cui le righe di $A_{B_r\cup\{k\}}$ sono linearmente indipendenti, come può essere verificato in maniera analoga al caso precedente. Quindi la procedura **Scegli**(B,I) restituisce un insieme B_{r+1} che ha cardinalità strettamente maggiore della cardinalità di B_r.

Quando $|B_r|=n$, poiché **Simplesso_su_Coni** restituisce ξ e h tali che

$$A_i\xi \begin{cases} = 0, & \text{se } i \in B_r \backslash \{h\}, \\ < 0, & \text{se } i = h, \end{cases}$$

è immediato verificare che le righe di $A_{B_r\backslash\{h\}\cup\{k\}}$, per ogni $k \in I_{r+1} \backslash I_r$ sono linearmente indipendenti.

Teorema 3.8
La procedura **Simplesso_Primale_Duale** *è corretta.*

Dim.
Chiaramente, se termina, la procedura fornisce la soluzione cercata; dimostriamo allora che essa termina in un numero finito di iterazioni. Ad ogni iterazione il sistema $A_{I_r}x = b_{I_r}$ ha una ed una sola soluzione ed inoltre $cx^{(r+1)} > cx^{(r)}$, dove con $x^{(r)}$ si indica la soluzione ammissibile ottenuta alla iterazione r. Quindi non possono esistere due indici p e q, con $p > q$, tali che $I_p = I_q$. La tesi segue dal fatto che gli insiemi distinti I_r, $r=1, 2,.., m$, sono in numero finito.♦

3.6 Determinazione di una soluzione ammissibile

Fino ad ora abbiamo sempre risolto problemi di *PL* per i quali conoscevamo una soluzione ammissibile da cui partire. Per concludere la trattazione ed essere in grado di risolvere qualsiasi problema, anche non avendo a disposizione una soluzione di partenza, dobbiamo vedere come fare a determinare una soluzione ammissibile o stabilire se non ne esistono.
Consideriamo un problema:

$$P: \quad \max\ cx \qquad Ax \leq b$$

Se è $b \geq 0$, il $\bar{x}=0$ è banalmente una soluzione ammissibile per P. Nel caso in cui esistano dei termini noti negativi è necessario risolvere un problema ausiliario per pervenire ad una soluzione ammissibile di partenza.
Sia $J_+ = \{i: b_i \geq 0\}$ e $J_- = \{i: b_i < 0\}$. Costruiamo il *problema ausiliario*

$$\begin{array}{llrl} PA: & \max & -ev & \\ & A_{J_+}x & & \leq b_{J_+} \\ & A_{J_-}x & -v & \leq b_{J_-} \\ & & -v & \leq 0. \end{array}$$

È immediato verificare che $x = 0$, $v = -b_{J_-}$ è una soluzione ammissibile per PA.
L'algoritmo **Simplesso_Primale_Duale** consente di determinare una soluzione ottima $(\bar{x},\bar{v})$ di PA.
Si osservi che una soluzione ottima esiste, poiché per ipotesi la funzione obiettivo è superiormente limitata, infatti non può assumere valori positivi.

Si hanno due casi possibili:
i) $\bar{v} \neq 0$. In questo caso il problema P non è ammissibile. Infatti ad una soluzione ammissibile x di P corrisponderebbe la soluzione $(x, 0)$ di PA con valore nullo della funzione obiettivo e di conseguenza migliore dell'ottimo determinato.
ii) $\bar{v} = 0$. In questo caso $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile per P.
Pertanto, la soluzione di un problema di *PL* richiede due volte l'applicazione dell'algoritmo del simplesso. Per questo motivo si parla spesso di *metodo delle due fasi*.

Esempio

Consideriamo il problema:

$$
\begin{array}{lrrcr}
\max & 3x_1 & +x_2 & & \\
& x_1 & & \leq & 4 \\
& -x_1 & -\ x_2 & \leq & -1 \\
& -x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\
& x_1 & +2x_2 & \leq & 14 \\
& -x_1 & & \leq & 0 \\
& & -x_2 & \leq & 0
\end{array}
$$

Il secondo vincolo ha termine noto negativo che esclude l'origine dalla regione ammissibile. Per verificare se esiste una soluzione ammissibile formuliamo il problema ausiliario:

$$
\begin{array}{lrrrcr}
\max & & & -v_1 & & \\
& x_1 & & & \leq & 4 \\
& -x_1 & -\ x_2 & -v_1 & \leq & -1 \\
& -x_1 & +2x_2 & & \leq & 2 \\
& x_1 & +2x_2 & & \leq & 14 \\
& -x_1 & & & \leq & 0 \\
& & -x_2 & & \leq & 0 \\
& & & -v_1 & \leq & 0
\end{array}
$$

Una soluzione ammissibile è data da $x_1=0$, $x_2=0$, $v_1=1$, e da questa soluzione possiamo applicare l'algoritmo del Simplesso Primale-Duale. L'insieme dei vincoli attivi è $I=\{2,5,6\}$. Il sistema duale è:

$$
\begin{array}{rrrcr}
-\eta_1 & -\eta_2 & & = & 0 \\
-\eta_1 & & -\eta_3 & = & 0 \\
-\eta_1 & & & = & -1
\end{array}
$$

che ha soluzione $\eta_1 = 1$, $\eta_2=-1$, $\eta_3=-1$ chiaramente non ammissibile a causa dei valori negativi. La direzione di crescita ammissibile si ottiene risolvendo il sistema primale:

$$
\begin{array}{rrrcr}
-\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & = & 0 \\
-\xi_1 & & & = & -1 \\
& -\xi_2 & & = & 0
\end{array}
$$

che ha soluzione $\xi_1=1$, $\xi_2=0$, $\xi_3=-1$. Il passo di spostamento lungo questa direzione è di $\lambda=1$. Il nuovo punto è: $x_1=1$, $x_2=0$, $v_1=0$, la cui ottimalità è semplice da verificare. Poiché $v=0$ possiamo considerare la soluzione $x_1=1$, $x_2=0$ come punto di partenza per risolvere il problema originale.

Esercizio

Considerare il problema dell'esempio precedente con vettore dei termini noti $b=(4,-10,2,14,0,0)$. Determinare se esiste una soluzione ammissibile o se la regione ammissibile è vuota.

4 Scarti complementari e interpretazione economica

Consideriamo la coppia di problemi duali:

$$
\begin{array}{llll}
P: & \max\ cx & \qquad D: & \min\ yb \\
& Ax \leq b & & yA = c \\
& & & y \geq 0.
\end{array}
$$

Vale il seguente teorema, detto teorema degli scarti complementari dato che mette in relazione gli scarti dei vincoli di un problema con le variabili dell'altro.

Teorema 4.1

Siano $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni ammissibili per P e D rispettivamente. Sono equivalenti le seguenti proprietà:

i) $\bar{x}$ *e* $\bar{y}$ *sono soluzioni ottime;*

ii) $c\bar{x} = \bar{y}b$;

iii) $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Dim.

i) e *ii*) sono equivalenti per teorema forte della dualità.

Per completare la dimostrazione basta provare che (*ii*) implica (*iii*) e che a sua volta (*iii*) implica (*ii*), cioè:

$$c\bar{x} = \bar{y}b \quad\Rightarrow\quad \bar{y}A\bar{x} = \bar{y}b \quad\Rightarrow\quad \bar{y}(b - A\bar{x}) = 0,$$

$$\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0 \quad\Rightarrow\quad \bar{y}A\bar{x} = \bar{y}b \quad\Rightarrow\quad c\bar{x} = \bar{y}b. \ \blacklozenge$$

Definizione 4.1

Le soluzioni $\bar{x}$ *e* $\bar{y}$ sono dette *complementari* se valgono le condizioni *iii*) del teorema 4.1, dette condizioni degli *scarti complementari*.

Data una coppia di soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili per *P* e *D* rispettivamente, in base al teorema 4.1 tali soluzioni sono ottime se e solo se valgono le condizioni degli *scarti complementari*, componente per componente:

$$(4.1) \qquad \bar{y}_i\,(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \ \ i = 1,\dots,m.$$

Infatti poiché $\bar{y} \geq 0$ e $(b\text{-}A\bar{x}) \geq 0$ il prodotto scalare nella *iii)* è nullo se e solo se vale la (4.1), elemento per elemento. Si osservi inoltre che (4.1) implica:

$$(4.2) \qquad \begin{array}{lcl} \bar{y}_i > 0 & \Rightarrow & A_i\bar{x} = b_i, \\ & & \\ A_i\bar{x} < b_i & \Rightarrow & \bar{y}_i = 0, \end{array}$$

e cioè date $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ottime per *P* e *D*, se la *i*-esima componente di $\bar{y}$ è strettamente positiva allora lo *i*-esimo vincolo di $Ax \leq b$ è soddisfatto come equazione; viceversa se l'*i*-esimo vincolo di $Ax \leq b$ è soddisfatto come disequazione stretta, allora la *i*-esima componente di $\bar{y}$ è nulla. Ovviamente se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ammissibili e vale (4.1), allora $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime.

<u>Esempio: applicazione degli scarti complementari</u>

Si consideri la seguente coppia di problemi duali:

$$P: \max\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad D: \min\ 5y_1 + 4y_2 + 3y_3$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & \leq & 4 \\ x_2 & \leq & 3 \\ -x_1 & \leq & 0 \\ -x_2 & \leq & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} y_1 + y_2 - y_4 = 1 \\ y_1 + y_3 - y_5 = 2 \\ y_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,5. \end{array}$$

Consideriamo $\bar{x}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ e verifichiamo se tale soluzione è ottima facendo ricorso al teorema degli scarti complementari.

Per la proprietà degli scarti complementari si ha:

$$\begin{array}{lll} \bar{x}_1 < 4 & \Rightarrow & \bar{y}_2 = 0, \\ -\bar{x}_1 < 0 & \Rightarrow & \bar{y}_4 = 0, \\ -\bar{x}_2 < 0 & \Rightarrow & \bar{y}_5 = 0. \end{array}$$

Quindi le componenti non nulle di una soluzione complementare $\bar{y}$ di D devono soddisfare:

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_1 + y_3 = 2. \end{cases}$$

Quindi $\bar{y} = (1,0,1,0,0)$ è la soluzione duale complementare. Poiché $\bar{y} \geq 0$ possiamo concludere che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime.

Se invece prendiamo in esame il punto $\bar{x}=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$, controllando quali vincoli valgono con il minore stretto ricaviamo le informazioni sulle variabili duali:

$$\begin{array}{lll} \bar{x}_1 + \bar{x}_2 < 5 & \Rightarrow & \bar{y}_1 = 0, \\ \bar{x}_2 < 3 & \Rightarrow & \bar{y}_3 = 0, \\ -\bar{x}_1 < 0 & \Rightarrow & \bar{y}_4 = 0. \end{array}$$

La soluzione duale complementare è quindi: $\bar{y}=(0,1,0,0,-2)$, il che implica che $\bar{x}$ non sia ottima.

Esercizio

Calcolare la soluzione duale complementare per la soluzione $\bar{x}=\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$ nel problema della fabbrica di serramenti.

Si può estendere il teorema degli scarti complementari alla coppia simmetrica. Si noti che le condizioni mettono in relazione gli scarti dei vincoli del primale con le variabili del duale ma, a differenza del caso asimmetrico, abbiamo anche condizioni che mettono in relazione gli scarti dei vincoli del duale con le variabili del primale. Questo è una conseguenza del fatto che nella coppia simmetrica entrambi i problemi hanno vincoli di disuguaglianza, mentre nella coppia asimmetrica il duale ha vincoli di uguaglianza, pertanto i loro scarti saranno sempre nulli per qualsiasi soluzione duale ammissibile.

Teorema 4.2
Siano:

$$P: \quad \max\ cx \qquad\qquad D: \quad \min\ yb$$
$$\quad Ax \leq b \qquad\qquad\qquad yA \geq c$$
$$\quad x \geq 0 \qquad\qquad\qquad y \geq 0.$$

$\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni ammissibili per P e D rispettivamente;
allora $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime se e solo se:

$$\bar{y}_i\,(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i=1,\ldots,m,$$
$$(\bar{y}A^j - c_j)\bar{x}_j = 0, \quad j=1,\ldots,n.$$

Dim.
Consideriamo due soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili per P e per D. Per l'ammissibilità delle sue soluzioni abbiamo:

$$c\bar{x} \leq \bar{y}A\bar{x} \leq \bar{y}b.$$

Se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime si ha $c\bar{x} = \bar{y}b$, e le disuguaglianze dell'espressione sopra valgono come uguaglianze. Quindi considerando la prima uguaglianza $c\bar{x} = \bar{y}A\bar{x}$ abbiamo:

$$(\bar{y}A - c)\bar{x} = 0$$

mentre considerando la seconda uguaglianza $\bar{y}A\bar{x} = \bar{y}b$ abbiamo

$$\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0.$$

Ripetendo le stesse considerazione in senso inverso dimostriamo che se valgono le condizioni degli scarti complementari allora $c\bar{x} = \bar{y}b$ e le soluzioni sono ottime. ♦

4.1 Interpretazione economica delle variabili duali

Utilizzando il risultato degli scarti complementari possiamo dare una interpretazione economica alle variabili duali. Si consideri la coppia di problemi:

$$P: \quad \max\ cx \qquad\qquad D: \quad \min\ yb$$
$$\quad Ax \leq b \qquad\qquad\qquad yA = c$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y \geq 0.$$

P può essere interpretato come il problema di utilizzare le risorse disponibili (vettore b), distribuendole fra un dato insieme di attività (variabili x) in modo da massimizzare il profitto. Ogni colonna della matrice A corrisponde ad un'attività, e il valore della corrispondente variabile fornisce il livello dell'attività. La fig. 22 raffigura un possibile esempio, con indicata anche la soluzione ottima $\bar{x}$.

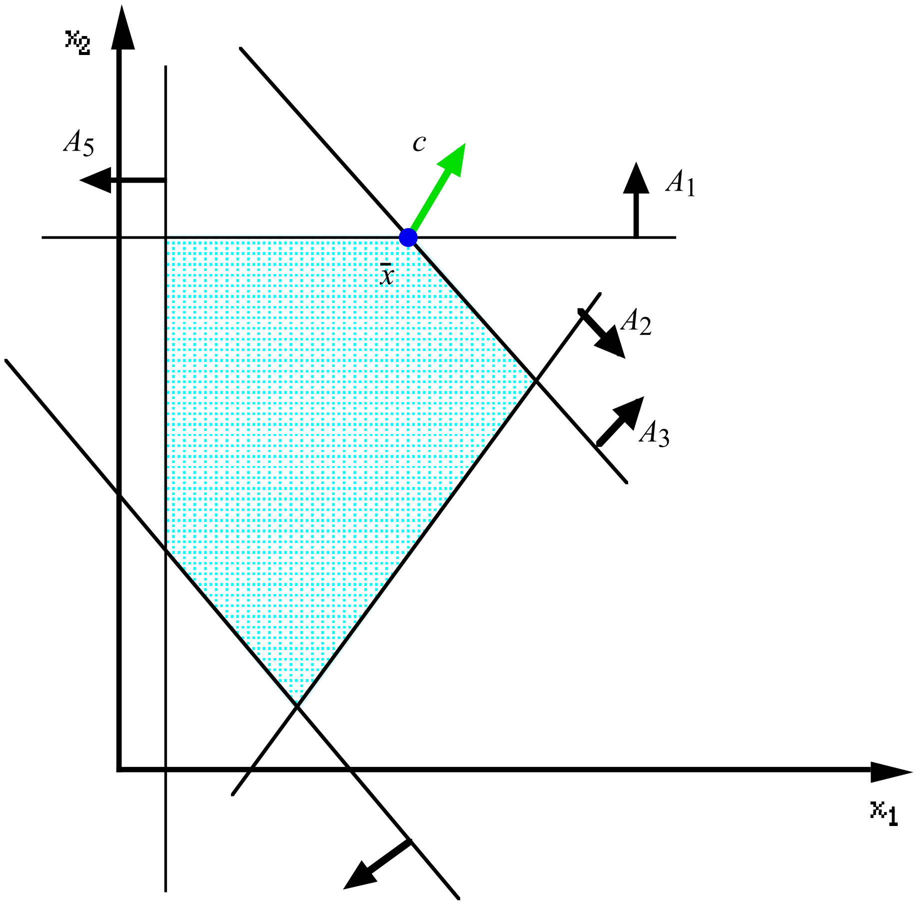

fig. 22: esempio di problema di utilizzo ottimale di risorse

Sia $\bar{y}$ una soluzione complementare di D. Consideriamo adesso una piccola variazione del vettore b, ovvero una variazione della disponibilità delle risorse. Assumiamo che tale variazione sia abbastanza piccola in modo la soluzione ottima $\bar{x}$ rimanga nell'intersezione degli iperpiani in cui era precedentemente (nell'esempio di fig. 22 deve rimanere quindi nell'intersezione del primo e del secondo vincolo). Indichiamo con $\bar{b}(\varepsilon)=b+\varepsilon$ il nuovo valore assunto dal vettore b, dove $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^m$ è il vettore delle variazioni. Denotiamo con $P(\varepsilon)$ e $D(\varepsilon)$ i problemi primale e duale relativi al nuovo vettore b.

Chiaramente l'avere modificato i termini noti non ha alcun effetto sulla ammissibilità di $\bar{y}$ per $D(\varepsilon)$, infatti i vincoli del duale non coinvolgono il vettore b. La variazione del termini noti influenzano ovviamente le coordinate della soluzione ottima di $P(\varepsilon)$ che indichiamo con $\bar{x}(\varepsilon)$.

Osserviamo che $\bar{x}(\varepsilon)$, per un ε abbastanza piccolo, definisce gli stessi vincoli attivi di $\bar{x}$. Come immediata conseguenza abbiamo che le condizioni del teorema degli scarti complementari continuano a valere anche per la coppia di soluzioni $\bar{x}(\varepsilon)$ e $\bar{y}$ di $P(\varepsilon)$ e $D(\varepsilon)$. In altre parole $\bar{x}(\varepsilon)$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ammissibili e complementari, e la variazione del problema primale non ha avuto effetto sulla soluzione ottima del duale. Tale variazione ha però effetto sul valore di tale soluzione; infatti il valore della funzione obiettivo diventa:

$$c\bar{x}(\varepsilon)=\bar{y}(b+\varepsilon)=\bar{y}b+\bar{y}\varepsilon.$$

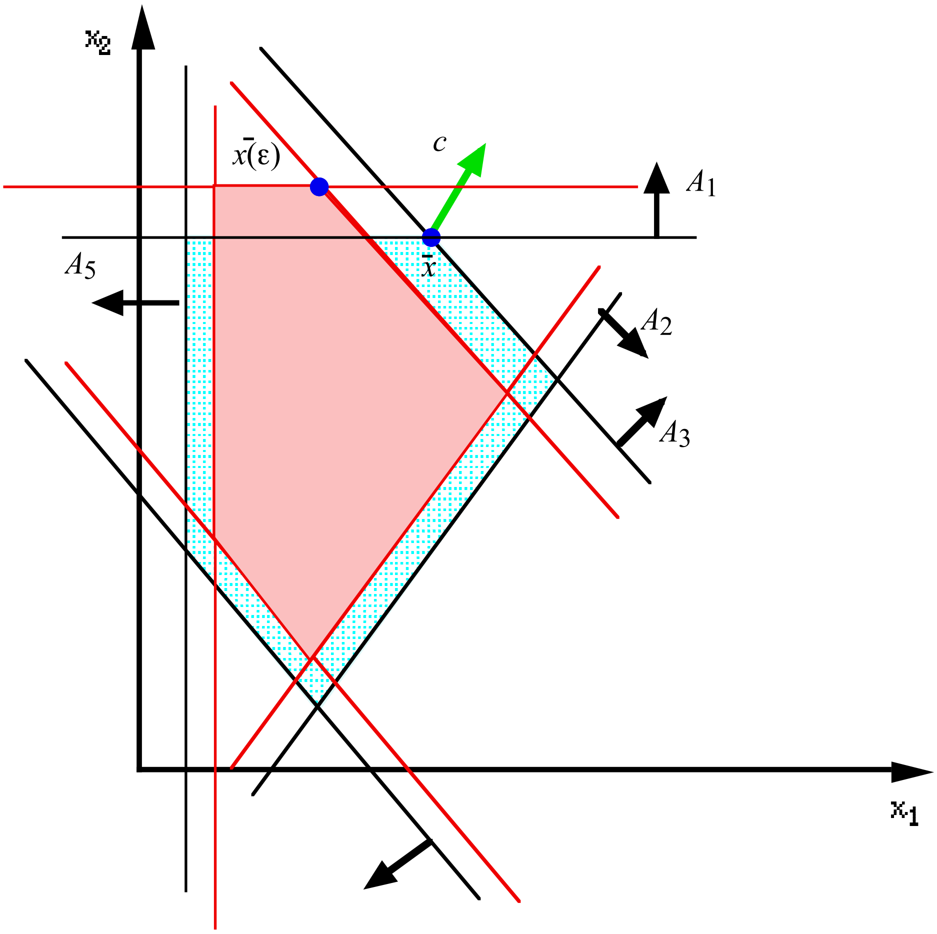

fig. 23: variazione delle risorse e nuova soluzione ottima

Pertanto, nelle ipotesi fatte, il vettore $\bar{y}$ rappresenta il gradiente del valore ottimo della funzione obiettivo espresso in funzione della variazione ε di b, calcolato nell'origine (ε=0). La singola componente $\bar{y}_i$ fornisce la variazione di valore ottimo della funzione obiettivo per una variazione unitaria(1) del valore della i-esima risorsa, pertanto essa indica il massimo valore che è ragionevole pagare un'unità aggiuntiva di tale risorsa. In questo senso si dice i valori ottimi delle variabili duali forniscono i *valori marginali* (o anche i *prezzi ombra*) delle risorse.

I valori ottimi delle variabili duali forniscono una valutazione del valore relativo che hanno le diverse risorse in base a come vengono utilizzate nel processo produttivo definito dal problema P. In base a queste interpretazione anche chiaro perché le variabili duali relative alle risorse che non vengono utilizzate al massimo nella soluzione ottima siano a zero.

Esempio: serramenti e infissi

Riprendiamo, per esemplificare i concetti esposti, il problema della fabbrica di serramenti. Abbiamo più volte verificato che il punto $\bar{x}=\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$ è ottimo e la soluzione duale complementare corrispondente è $\bar{y}$=(0, 15, 10,0,0), con valore della funzione obiettivo pari a 360. Ci chiediamo cosa accade se aumentiamo di una unità la seconda risorsa, cioè incrementiamo la disponibilità di ore del fabbro, portandola da 12 a 13. Questo corrisponde graficamente a traslare verso l'alto di una unità la faccia corrispondente al vincolo $2x_2 \leq 12$. Il vertice intersezione delle facce corrispondenti al primo ed al terzo

(1) Naturalmente nell'ipotesi che una tale variazione non alteri la soluzione ottima del duale.

vincolo si sposta nel punto $\bar{x}(\varepsilon)=\begin{bmatrix} 5/3 \\ 13/2 \end{bmatrix}$. Questo vertice continua ad avere come vincoli attivi il secondo e il terzo, pertanto la soluzione duale $\bar{y}$=(0, 15, 10,0,0) continua ad essere ottima. Ciò che cambia è il valore della funzione obiettivo che è ora 375. Osserviamo che l'incremento è dato dal valore della variabile duale corrispondente al secondo vincolo (15) per l'incremento della seconda risorsa (1).

*4.2 *Simplesso primale duale e teorema degli scarti complementari*

Si consideri la coppia asimmetrica di problemi (P, D) e sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile per P. Dal teorema degli scarti complementari segue che $\bar{x}$ è soluzione ottima se e solo se esiste $\bar{y}$, soluzione ammissibile di D per cui vale

$$\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$$

Indicando con I l'insieme degli indici di vincoli attivi e con $\bar{I}$= {1,..,m}\ I, la relazione precedente è equivalente a

$$\bar{y}_{\bar{I}}(b_{\bar{I}} - A_{\bar{I}}\bar{x}) = 0 \text{ che implica } \bar{y}_{\bar{I}} = 0.$$

Quindi $\bar{x}$ è una soluzione ottima se e solo se ($\bar{y}_I$, 0) è una soluzione ammissibile per il problema duale D, e cioè:

$$\begin{cases} \bar{y}_I A_I = c, \\ \bar{y}_I \quad \geq 0. \end{cases}$$

Si osservi che ad ogni iterazione del **Simplesso_Primale-Duale**, per come l'algoritmo costruisce la soluzione duale, la coppia di soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ che viene generata a ogni iterazione dell'algoritmo rispetta le condizioni degli scarti complementari.

*4.3 *Variazione nei dati del problema: caso del vettore c*

Va ricordato che per costruire il modello di *PL* risolto sono state fatte approssimazioni, ad esempio perché sono stati assunti come lineari fenomeni che non lo sono, oppure per le assunzioni fatte nella stima di parametri non noti con precisione. È quindi utile conoscere quanto sia stabile la soluzione trovata, cioè quanto essa sia sensibile a piccole variazioni dei dati. In questo casi si parla di *analisi di sensitività*. A volte si considerano alcuni dei dati come funzione di uno o più parametri e ci si pone il problema di determinare il valore ottimo della funzione obiettivo come funzione dei parametri stessi; si parla in questo caso di *analisi parametrica*. Abbiamo parzialmente affrontato il problema studiando come la variazione del termine noto influenzi il valore della funzione obiettivo. Ora studiamo le variazioni del vettore della funzione obiettivo c, e verifichiamo per quali variazioni la soluzione ottima del problema originale rimane tale.
Consideriamo la coppia di problemi P: max $\{cx: Ax \leq b\}$, D: min $\{yb: yA = c, y \geq 0\}$ con soluzioni ottime rispettivamente $\bar{x}$ e $\bar{y}$. Supponiamo che il vettore dei costi c venga sostituito dal nuovo vettore c'. Per continuare ad avere $\bar{x}$ come soluzione ottima dobbiamo avere che la soluzione duale complementare y' relativa al nuovo vettore c' deve rimanere ottima. Quindi se I è l'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ bisogna avere:

$$y'A_I = c'$$
$$y' \geq 0$$

Se il vettore c' è funzione di un parametro α, possiamo ricavare le condizioni di ottimalità da imporre sul parametro.

Esempio

Consideriamo il problema della fabbrica di serramenti la cui soluzione ottima abbiamo visto essere $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$. Ci chiediamo ora per quali valori del prezzo delle porte (c_1=α) tale soluzione rimane ottima. In $\bar{x}$ i vincoli attivi sono il secondo e il terzo. Ricaviamo la soluzione duale $\bar{y}$ espressa in funzione del parametro α:

$$3\, y_3 = \alpha$$
$$2\, y_2 + 2\, y_3 = 50$$

quindi $\bar{y}=(0,\frac{\alpha}{3},50-\frac{2}{3}\alpha,0,0)$. Per avere la garanzia di ottimalità bisogna imporre le condizioni di non negatività sulle varie componenti di $\bar{y}$, quindi otteniamo:

$$\alpha\geq 0 \text{ e } \alpha\leq 75.$$

Questo significa che la soluzione $\bar{x}$ rimane ottima per valori di costo delle porte compresi tra 0 e 75. Questa analisi può venire interpretata facilmente anche dal punto di vista geometrico. Infatti dobbiamo ricavare per quali valori di α il vettore c rimane compreso nel cono generato da A_2 e A_3. Per fare questo è sufficiente tracciare la retta orizzontale che passa per c.

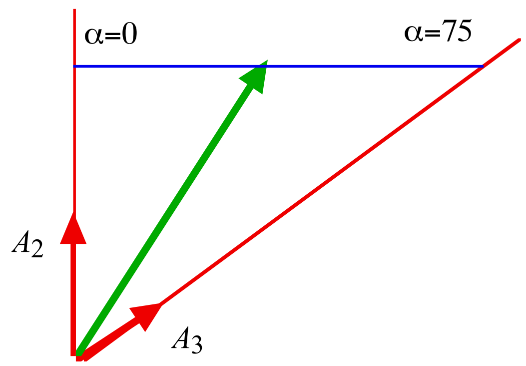

fig. 24: interpretazione geometrica dell'analisi parametrica di c

Esercizio

Nel problema della fabbrica di serramenti, calcolare per quali valori del parametro c_2=α la soluzione $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ rimane ottima.

*4.4 *Soluzione di problemi di grandi dimensioni: utilizzo degli scarti complementari*

Alla fine del capitolo sui flussi abbiamo introdotto un problema di flusso multiterminale. Il problema è specificato da una rete di flusso $G=(N,A)$, con costi $c_{ij}\geq 0$ e capacità u_{ij} sugli archi, un insieme di coppie di nodi K e una matrice di domande di instradamento di flusso $d_{s_k t_k}$ tra ogni coppia di nodi (s_k,t_k), $k\in K$. Per formulare il problema abbiamo introdotto le variabili di flusso x_p lper ogni cammino utile p. P denota l'insieme di tutti i cammini utili alla soluzione del problema e $P_k \subset P$, per ogni coppia origine destinazione (s_k,t_k), denota tutti i cammini che vanno da s_k a t_k. Il costo di un cammino p è dato dalla somma dei costi degli archi che lo costituiscono:

$$c_p = \sum_{(i,j)\in p} c_{ij}.$$

La formulazione per cammini del problema, è:

$$
\begin{array}{lll}
R: \min \sum_{k\in K}\sum_{p\in P_k} c_p x_p & & \\
\sum_{p\in P_k} x_p = d_{s_k t_k} & \forall k\in K \\
\sum_{p\in P:(i,j)\in p} x_p \le u_{ij} & \forall (i,j)\in A \\
x_p \ge 0 & \forall p\in P
\end{array}
$$

il cui duale è:

$$
\begin{array}{ll}
DR: \max \sum_{k\in K} d_{s_k t_k}\, y_k + \sum_{(i,j)\in A} u_{ij} z_{ij} & \\
y_k + \sum_{(i,j)\in p} z_{ij} \le c_p & \forall k\in K, \forall p\in P_k \\
z_{ij} \le 0 & \forall (i,j)\in A
\end{array}
$$

Questa formulazione, visto che il numero di cammini elementari tra ogni coppia di nodi di un grafo può essere esponenziale, richiede un numero elevatissimo di variabili, il che rende il problema difficoltoso da risolvere. Non è però necessario ricorrere a tutti i cammini, e alle variabili a loro associate, per risolvere il problema. Infatti, conoscendo l'insieme dei cammini $P' \subset P$ ($P'_k \subset P_k$, $k\in K$) che portano flusso diverso da zero nella soluzione ottima, potremmo ridurre la formulazione come segue.

$$
\begin{array}{ll}
M: \min \sum_{k\in K}\sum_{p\in P'_k} c_p x_p & \\
\sum_{p\in P'_k} x_p = d_{s_k t_k} & \forall k\in K \\
\sum_{p\in P':(i,j)\in p} x_p \le u_{ij} & \forall (i,j)\in A \\
x_p \ge 0 & \forall p\in P'
\end{array}
$$

Purtroppo però, prima di ottenere la soluzione ottima, non ci è dato sapere quale sia l'insieme dei cammini P' al quale restringere l'attenzione. L'idea del metodo di soluzione che proponiamo è di considerare un sottoinsieme P' qualsiasi che garantisca l'esistenza di una soluzione ammissibile del problema M (detto *master*). Rispetto al problema originale, il problema master ha un sottoinsieme di variabili, ma ha lo stesso insieme di vincoli, ad eccezione di quelli di segno. Formuliamo il problema duale di M. Introduciamo una variabile y_k per ogni vincolo sulla domanda, e una variabile z_{ij} per ogni vincolo di capacità. Il duale è:

$$
\begin{array}{ll}
DM: \max \sum_{k\in K} d_{s_k t_k}\, y_k + \sum_{(i,j)\in A} u_{ij} z_{ij} & \\
y_k + \sum_{(i,j)\in p} z_{ij} \le c_p & \forall k\in K, \forall p\in P'_k \\
z_{ij} \le 0 & \forall (i,j)\in A
\end{array}
$$

Notiamo che DM ha esattamente lo stesso insieme di variabili di DR, infatti queste fanno riferimento alle coppie di K e agli archi del grafo e non sono influenzate dalla scelta del sottoinsieme di cammini. Quello che varia rispetto al duale di R è l'insieme di vincoli, che facendo riferimento all'insieme di cammini P', è ridotto. La soluzione ottima di M ha valore maggiore o uguale alla soluzione ottima di R, infatti in M abbiamo ristretto la regione ammissibile limitando la scelta delle variabili. Anche DM ha valore ottimo maggiore o uguale a DR, poiché contiene meno vincoli. La questione che ci poniamo ora

è come fare a riconoscere se la soluzione ottima di M è ottima, e cioè se l'insieme ristretto di cammini P' che abbiamo considerato è stato sufficiente, o se al contrario deve essere esteso.
Consideriamo $\bar{x}$ soluzione ottima di M e la sua duale complementare $(\bar{y},\bar{z})$. Per verificare l'ottimalità di $\bar{x}$ per il problema originale R dovremmo verificare se la soluzione duale $(\bar{y},\bar{z})$ è ammissibile per DR o se esiste una coppia (s_k,t_k) e un cammino $p\in P_k$ per cui

$$\bar{y}_k + \sum_{(i,j)\in p} \bar{z}_{ij} > c_p. \tag{4.3}$$

Ricordando che c_p è dato dalla somma dei costi degli archi che compongono p, il problema di cercare un cammino tra s_k e t_k che rende vera la (4.3) può essere ricondotto alla ricerca di un cammino massimo sul grafo G in cui i costi di ogni arco (i,j) è dato da $\bar{z}_{ij} - c_{ij}$. Se la lunghezza del cammino massimo è maggiore o uguale a $-\bar{y}_k$ allora abbiamo trovato un vincolo di DR che viene violato dalla soluzione $(\bar{y},\bar{z})$. In tal caso possiamo aggiungere il cammino così trovato all'insieme dei cammini P'_k e iterare il procedimento. Altrimenti, se per ogni $k\in K$ non riusciamo a trovare un tale cammino, possiamo dire che nessun vincolo di DR è violato e la coppia di soluzioni $\bar{x}$ e $(\bar{y},\bar{z})$ è ottima.
Si noti che i coefficienti costo che guidano la ricerca del cammino massimo sono tutti minori o uguali di zero dato che le variabili $\bar{z}_{ij}\leq 0$ e i costi $c_{ij} \geq 0$. Questo significa che possiamo determinare il cammino massimo facilmente utilizzando uno degli algoritmi presentati nel capitolo precedente.

5. Basi complementari e algoritmo del simplesso

Consideriamo la coppia di problemi duali:

$$P: \quad \begin{array}{l} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad D: \quad \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

e sia $B \subseteq \{1,\ldots,m\}$ un insieme di indici tali che:

$$|B| = n,$$
$$det\,(A_B) \neq 0.$$

Alla matrice A_B possiamo associare i due vettori $\bar{x}\in \boldsymbol{R}^n$ e $\bar{y}\in \boldsymbol{R}^n$ così definiti:

$$\begin{array}{l} \bar{x} = A_B^{-1} b_B \\ \bar{y} = (\bar{y}_B, \bar{y}_N) \ \text{ con } \bar{y}_B = cA_B^{-1}, \bar{y}_N = 0 \text{ e } N = \{1,\ldots,m\}\setminus B. \end{array} \tag{5.1}$$

Tali vettori vengono detti *soluzioni di base* per i problemi P e D, associati alla *matrice di base* A_B. Essi saranno detti *ammissibili*, *non ammissibili*, *degeneri* e *non degeneri* in accordo alle condizioni riportate nella seguente tabella:

	$\bar{x}$	$\bar{y}$
ammissibile	$A_N\bar{x} \le b_N$	$\bar{y}_B \ge 0$
non ammissibile	$\exists\, j \in N$: $A_j\bar{x} > b_j$	$\exists\, j \in B$: $\bar{y}_j < 0$
degenere	$\exists\, j \in N$: $A_j\bar{x} = b_j$	$\exists\, j \in B$: $\bar{y}_j = 0$
non degenere	$\forall\, j \in N$: $A_j\bar{x} \ne b_j$	$\forall\, j \in B$: $\bar{y}_j \ne 0$

Osserviamo che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soddisfano le condizioni degli scarti complementari. Infatti:

$$\bar{y}(b - A\bar{x}) = [\bar{y}_B, \bar{y}_N] \begin{bmatrix} b_B - A_B\bar{x} \\ b_N - A_N\bar{x} \end{bmatrix} = 0.$$

I vettori $\bar{x}$ e $\bar{y}$ vengono anche detti *coppia di soluzioni di base complementari* associate alla matrice di base (o semplicemente *base*) A_B.

Esempio

Si consideri la coppia di problemi duali:

$$
\begin{array}{llllll}
P\text{: max} & x_1 & +3x_2 & & & \\
& -2x_1 & +x_2 & \le & 1 & \\
& x_1 & -2x_2 & \le & -4 & \\
& x_1 & +x_2 & \le & 14 & \\
& x_1 & & \le & 8 & \\
& & -x_2 & \le & -4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
D\text{: min} & y_1 & -4y_2 & +14y_3 & +8y_4 & -4y_5 & & \\
& -2y_1 & +y_2 & +y_3 & +y_4 & & = & 1 \\
& y_1 & -2y_2 & +y_3 & & -y_5 & = & 3 \\
& \multicolumn{7}{l}{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0}
\end{array}
$$

ln fig. 24 viene riportata la rappresentazione geometrica di P.

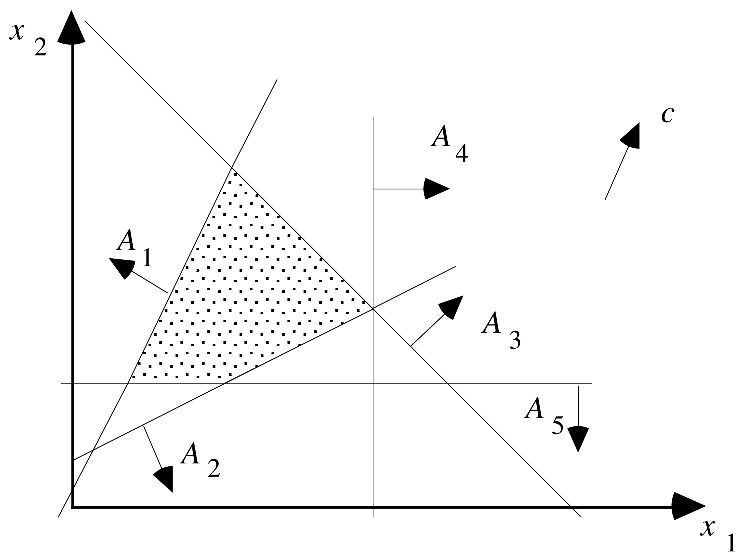

fig. 24

Consideriamo la base B={2,5}. Si ha:

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = A_B^{-1} \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} A_1\bar{x} = -4 < 1 \\ A_3\bar{x} = 8 < 14 \\ A_4\bar{x} = 4 < 8 \end{array}$$

Quindi $\bar{x}$ è una soluzione di base ammissibile. La soluzione $\bar{y}$ associata ad A_B è data da:

$$\bar{y} = [\bar{y}_B, \bar{y}_N], \qquad \bar{y}_B = cA_B^{-1} = [1,-5], \qquad \bar{y}_N = 0.$$

La soluzione $\bar{y}$ non è ammissibile, $\bar{y}_5 = -5 < 0$. Inoltre, si noti che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni non degeneri.

Esercizio

Per il problema dell'esempio precedente si consideri la base B={2,4}. Verificare ottimalità e degenerazione delle soluzioni primale e duale.

Consideriamo adesso il problema di stabilire se una data soluzione primale $\bar{x}$ sia una soluzione di base. Ricordiamo che I è l'insieme dei vincoli attivi: $I = \{i: A_i\bar{x} = b_i\}$.

Se $r(A_I) = n$, allora $\bar{x}$ è una soluzione di base.

Infatti $r(A_I) = n \Rightarrow \exists\, B \subseteq I$: $|B| = n$, $det(A_B) \neq 0$; quindi $\bar{x} = A_B^{-1}b_B$.
Se $|I| = n$, allora $B = I$ e $\bar{x}$ è una soluzione di base non degenere. In questo caso esiste un solo vettore $\bar{y}$ tale $(\bar{x},\bar{y})$ sia una coppia di soluzioni di base complementari. Infatti la matrice di base A_B associata a $\bar{x}$ è univocamente determinata e di conseguenza è univocamente determinato il vettore $\bar{y}$.
Se $|I| > n$, allora $\bar{x}$ è una soluzione degenere. In questo caso più matrici di base possono corrispondere a $\bar{x}$ e conseguentemente più soluzioni di base di D possono costituire con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari. Si consideri il seguente esempio.

<u>Esempio</u>

Con riferimento al problema introdotto nell'esempio di fig. 24 si consideri $\bar{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ con $c\bar{x} = 26$. Si ha:

$$\begin{array}{l} A_1\bar{x} = -10 < 1 \\ A_2\bar{x} = -4 \\ A_3\bar{x} = 14 \\ A_4\bar{x} = 8 \\ A_5\bar{x} = -6 \quad < -4 \end{array}$$

La soluzione $\bar{x}$ è ammissibile e soddisfa come equazione i vincoli 2, 3, 4, cioè I = {2,3,4}. $\bar{x}$ è una soluzione di base degenere cui corrispondono le basi: B_1={2,3}, B_2={2,4}, B_3={3,4},

$$\bar{x} = A_{B_1}^{-1} \begin{bmatrix} -4 \\ 14 \end{bmatrix} = A_{B_2}^{-1} \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} = A_{B_3}^{-1} \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Le soluzioni duali complementari corrispondenti a $\bar{x}$ sono date, come si può verificare, da:

$$\bar{y}^1 = [0,\tfrac{-2}{3},\tfrac{5}{3},0,0], \quad \bar{y}^2 = [0,\tfrac{-3}{2},0,\tfrac{5}{2},0], \qquad \bar{y}^3 = [0,0,3,-2,0],$$

che sono soluzioni non ammissibili per D e $c\bar{x} = \bar{y}^1b = \bar{y}^2b = \bar{y}^3b = 26$.

Consideriamo adesso il problema di stabilire se una data soluzione duale $\bar{y}$ sia una soluzione di base. Sia $J = \{j: \bar{y}_j \neq 0\}$.

Se A_j, $j \in J$ sono linearmente indipendenti,
allora $\bar{y}$ è una soluzione di base.

Infatti se $|J| = n$, allora la matrice di base corrispondente a $\bar{y}$ è $A_B = A_J$. In questo caso esiste un solo vettore $\bar{x}$ tale $(\bar{x},\bar{y})$ sia una coppia di soluzioni di base complementari. Infatti la matrice di base A_B associata a $\bar{y}$ è univocamente determinata e di conseguenza è univocamente determinato il vettore $\bar{x}$.
Se $|J| < n$, allora $\bar{y}$ è una soluzione degenere; a tale soluzione corrispondono più matrici di base ottenute aggiungendo, alla matrice A_J, $n - |J|$ righe di A (non in A_J) in modo che la matrice risultante A_B abbia determinante non nullo. Si osservi che, poiché per ipotesi $r(A)=n$, una tale matrice esiste. Conseguentemente più soluzioni di base di P possono costituire con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari. Si consideri il seguente esempio.

Esempio
Si consideri l'esempio di fig. 24 ma con gradiente della funzione obiettivo $c = [1,1]$.
Sia $\bar{y} = [0,0,1,0,0]$ e $\bar{y}b = 14$. $\bar{y}$ è una soluzione ammissibile di base degenere per D. Infatti risulta $J=\{3\}$. Si può facilmente verificare che le basi per $\bar{y}$ sono $B_1 = \{1,3\}$, $B_2 = \{2,3\}$, $B_3 = \{3,4\}$, $B_4 = \{3,5\}$ e risulta:

$$\bar{y}_{B_1} = cA^{-1}_{B_1} = \bar{y}_{B_2} = cA^{-1}_{B_2} = [0,1], \qquad \bar{y}_{B_3} = cA^{-1}_{B_3} = \bar{y}_{B_4} = cA^{-1}_{B_4} = [1,0].$$

Le soluzioni primali complementari corrispondenti a $\bar{y}$ sono date, come si può verificare, da:

$$\bar{x}^1 = A^{-1}_{B_1}\begin{bmatrix}1\\14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{13}{3}\\ \frac{29}{3}\end{bmatrix}, \qquad \text{soluzione di base ammissibile,}$$

$$\bar{x}^2 = A^{-1}_{B_2}\begin{bmatrix}-4\\14\end{bmatrix} = A^{-1}_{B_3}\begin{bmatrix}14\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}, \qquad \text{soluzione di base ammissibile degenere,}$$

$$\bar{x}^3 = A^{-1}_{B_4}\begin{bmatrix}14\\-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\4\end{bmatrix}, \qquad \text{soluzione di base non ammissibile.}$$

Vale il seguente teorema che è conseguenza diretta della definizione di soluzioni di base complementari.

Teorema 5.1
Data una soluzione di base $\bar{x}$ per P [$\bar{y}$ per D] esiste almeno una soluzione di base $\bar{y}$ per D [$\bar{x}$ per P] che forma con $\bar{x}$ [$\bar{y}$] una coppia di soluzioni di base complementari.

5.1 Condizioni di ottimo

Poiché le soluzioni di base sono caratterizzate dalla base che le definisce, ricaviamo le condizioni di ammissibilità e di ottimalità direttamente sulla matrice di base.
Una matrice di base A_B è detta:

matrice di base primale ammissibile se: $\quad b_N - A_N A^{-1}_B b_B \geq 0;$

matrice di base duale ammissibile se: $\quad cA^{-1}_B \geq 0.$

Si osservi che una matrice di base A_B primale ammissibile individua la soluzione di base $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ ammissibile per P. Analogamente una matrice di base A_B duale ammissibile individua la soluzione $\bar{y} = [\bar{y}_B, \bar{y}_N] = [cA_B^{-1}, 0]$ ammissibile per D.

Possiamo formalizzare le condizioni di ottimo nel seguente teorema, conseguenza delle considerazioni fatte prima e del teorema degli scarti complementari.

Teorema 5.2 *Condizioni di ottimo*
Sia $\bar{x}$ [$\bar{y}$] una soluzione di base ammissibile per P [D] e sia A_B una matrice di base corrispondente. Allora, $\bar{x}$ [$\bar{y}$] è una soluzione ottima se $cA_B^{-1} \geq 0$ [$b_N - A_N A_B^{-1} b_B \geq 0$].

Se $\bar{x}$ [$\bar{y}$] è non degenere allora, come abbiamo osservato la soluzione complementare $\bar{y}$ [$\bar{x}$] è univocamente determinata. Segue che la condizione di ottimo è necessaria e sufficiente.
Nel caso di soluzioni degeneri la condizione è solo sufficiente, come mostra il seguente esempio.

<u>Esempio</u>
Si considerino, per il problema in fig. 25, la soluzione di base $\bar{x}$ tale che $I = \{1,2,3\}$ e le basi $B_1 = \{1,2\}$, $B_2 = \{1,3\}$, $B_3 = \{2,3\}$.

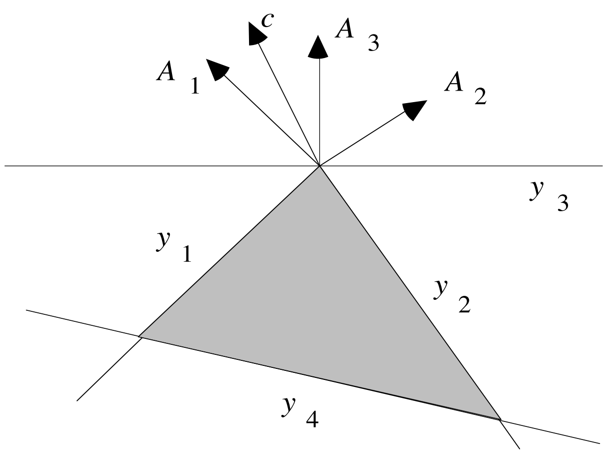

fig. 25

$$c \in cono(A_1, A_2) \Rightarrow \bar{y}_{B_1} \geq 0;$$
$$c \in cono(A_1, A_3) \Rightarrow \bar{y}_{B_2} \geq 0;$$
$$c \notin cono(A_2, A_3) \Rightarrow \bar{y}_{B_3} \ngeq 0;$$

essendo nell'ultimo caso $\bar{y}_2 < 0$ e $\bar{y}_3 > 0$. Quindi la matrice di base A_{B_3} non soddisfa la condizione di ottimo pur essendo $\bar{x}$ una soluzione ottima.

Resta ancora da dimostrare che se P e D hanno ottimo finito allora esiste una matrice di base e di conseguenza una coppia di soluzioni di base complementari ottime.

Teorema 5.3
Se P e D hanno ottimo finito, allora esiste almeno una coppia di soluzioni di base complementari, ($\bar{x}$)),$\bar{y}$), tali che $\bar{x}$ è soluzione ottima di P e $\bar{y}$ è soluzione ottima di D.

Dim.
L'algoritmo **Simplesso_Primale_Duale**, se termina con $|B|=n$ fornisce una matrice di base A_B ottima; altrimenti, si è in presenza di degenerazione duale, quindi effettuando ulteriori iterazioni a partire dalla soluzione ottima non di base x', si può determinare una soluzione di base $\bar{x}$ tale che $cx' = c\bar{x}$. ♦

Esercizio
Costruire esempi di problemi P e D rappresentabili in $\boldsymbol{R}^2$ con soluzione ottima degenere (sia primale che duale), individuando una matrice di base che non soddisfi le condizioni di ottimo.

5.2 Algoritmo del Simplesso Primale

Il metodo del simplesso costituisce il primo approccio computazionalmente efficiente per la soluzione di problemi di programmazione lineare. Originalmente proposto da G. B. Dantzig [1951] a partire da un idea di Von Neumman, il metodo del simplesso è stato sviluppato in diverse versioni e sta alla base dei più diffusi codici di programmazione lineare.
In precedenza abbiamo introdotto l'algoritmo del Simplesso Primale-Duale. Per ragioni di completezza introduciamo una variante nota con il nome *Simplesso Primale*. In pratica il Simplesso Primale può essere considerato come un caso particolare del Simplesso Primale-Duale in cui si ha, sin dall'inizio, una base ammissibile, cioè $|B|=n$. La peculiarità del Simplesso Primale di lavorare su soluzioni di base permette la riorganizzazione e semplificare alcune delle operazioni della procedura **Simplesso_Primale_Duale** senza ricorrere alla procedura **Simplesso_su_Coni** e l'eliminazione delle operazioni relative a soluzioni non di base.
L'algoritmo Simplesso Primale è riportato in fig. 26. In esso si suppone di avere in input una base ammissibile B e l'inversa della matrice di base, A_B^{-1}. In un numero finito di passi, l'algoritmo fornisce una matrice di base ottima, o riconosce D vuoto e conseguentemente P non superiormente limitato.

```
Procedure Simplesso_Primale (A,b,c,B,A_B^-1,Dvuoto,x̄,ȳ):
   begin
   1  ottimo:=false; Dvuoto:=false;
      repeat
   2    x̄:=A_B^-1 b_B; ȳ_B:=cA_B^-1; ȳ_N:=0;
   3    if ȳ_B≥0 then ottimo:=true
          else  begin
   4              h:=min{i: ȳ_i<0}; r:=B^-1(h)(1);
   5              ξ:=−A_B^-1 e_r;
   6              if A_iξ≤0 ∀i∈N then Dvuoto:=true
                    else begin
   7                      x(λ):=x̄+λξ;
   8                      θ:=max{λ: A_i x(λ)≤b_i, ∀i∈N, A_iξ>0}};
   9                      k:=min{i∈N: A_i x(θ)=b_i};
   10                     B:=B∪{k}\{h};
   11                     update(A_B^-1)
                        end
                end
      until Dvuoto or ottimo
   end
```

<u>*Osservazioni*</u>

L'algoritmo proposto coincide con l'algoritmo del simplesso primale-duale applicato a partire da una soluzione di base. Infatti il simplesso primale-duale non appena raggiunge una base si muove su basi adiacenti. Pertanto la correttezza dell'algoritmo è provata.

Con update(A_B^{-1}) abbiamo indicato una procedura che determina l'inversa della matrice di base $A_{B\cup\{k\}\setminus\{h\}}$ a partire della conoscenza della inversa A_B^{-1}.

La determinazione di θ al passo 8 è effettuata attraverso le valutazioni del *minimo rapporto*:

$$\theta = \min\{\frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_i\xi}: A_i\xi > 0, \forall i\in N\}.$$

Il criterio di scelta della componente negativa $\bar{y}_B$ di indice minimo h e la scelta di k indice minimo che individua il minimo rapporto, costituiscono le regole anticiclo di Bland su cui si basa la dimostrazione di convergenza dell'algoritmo. Osserviamo che in particolare la scelta di h corrisponde alla individuazione di una direzione di crescita. Sperimentalmente si prova che la scelta di queste direzioni produce un algoritmo abbastanza inefficiente. Poiché nei problemi reali l'algoritmo, anche in assenza di regole anticiclo, non cicla, si preferisce la scelta di direzioni che garantiscano (sperimentalmente) una migliore efficienza della procedura.

Ad esempio si può sostituire l'istruzione 4 con h:=max$\{|y_i|: y_i<0\}$. Osserviamo che il valore della funzione obiettivo $cx(\lambda)=c\bar{x}-\lambda y_h$. Quindi la direzione in esame è quella che fornisce il massimo incremento unitario della funzione obiettivo.

(1) $B^{-1}(h)$ fornisce la posizione in B dell'indice h ($h=B(r) \Leftrightarrow r=B^{-1}(h)$).